物理学選書15

山内恭彦・小谷正雄・高橋秀俊 編集

一般相対性理論

大阪大学教授

理学博士

内　山　龍　雄　著

東　京　裳　華　房　発　行

Theory of General Relativity

by

Ryoyu Utiyama, Dr. Sc.

SYŌKABŌ

TOKYO

序

相対性理論は2つに大別される．ひとつは1905年Einsteinにより提唱された特殊相対性理論である．これはNewtonの力学をさらに精密にしたもので，物体の速さが光の速さに近づいたときに，特にその偉力を発揮する．もうひとつは一般相対性理論とよばれるもので，これも1915年Einstein自身により発明されたものである．これは，その名前の示すとおり，ある意味では特殊相対性理論を一般化したものではあるが，むしろNewtonの理論に代る新しい重力理論と考える方が適切であろう．あるいはこれを時間・空間の物理学と呼んでもさしつかえない．

二十世紀の物理学を顧みるとき，そこにおける最大の業績といえば相対性理論の発明と量子力学の完成であろう．特に一般相対性理論はその構想の雄大，華麗な点で量子力学をしのぐものがある．これこそ人間の英智の傑作であり，それはEinsteinのような大天才にしてはじめて創りえたものといえよう．

相対性理論が誕生した当時は，それが従来の常識にそむくような結果を導いたために，学界のみならず，物理学に縁のない人々の間にもセンセーションをまき起こした．ときには，これを理解する者は世界中に10人とはいまいとまでいわれ，相対性理論はむずかしいことの代名詞のようにまでみなされた．しかしその後，この理論に対する実験的，ならびに理論的検討がすすむにつれて，この理論は，その仕組や形式がNewtonの重力論とは著しく異なっているにもかかわらず，それから導かれる結論は，Newtonの理論と比べるとき，その違いがあまりにも小さいために，“大山鳴動鼠一匹型の理論”とみなされるにいたった．ここまでいうのはいい過ぎだとしても，実験結果はNewtonの理論で十分に説明がつくために，一般相対性理論に対する物理学者の興味や関心は次第に薄れていった．このような傾向にさらに拍車をかけたのはEinstein自身を旗がしらとする統一場理論の研究グループである．彼らは電磁場と重力

場をともに時間・空間の幾何学的属性に還元しようと考えた．これはまことに野心的な試みではあるが，彼らの研究はあまりにも数学的な技巧に走りすぎ，物理学的な指導原理に欠けたために，悪くいえば新しい数学（幾何学）のアクロバチックな応用とでもいえそうなものであった．

しかし今世紀の後半にはいるとともに一般相対性理論は少しずつ物理学者の興味をとりもどすようになった．特に宇宙物理学や天文学における観測技術の発達につれ，またこの分野における種々の驚くべき事実の発見に刺激されて，Einstein の一般相対性理論は再び理論物理学や宇宙物理学の檜舞台にカム・バックした．さきにも述べたように，一般相対性理論は時間・空間の構造を究明する物理学である．したがって，宇宙の構造を議論することのできる唯一の理論ということができる．宇宙物理学の進歩に刺激されて急に一般相対性理論に対する評価が高まったのもまことに当然といえよう．

ところで近年，素粒子物理学ではゲージ場の理論が流行している．電磁場は最も簡単な一種のゲージ場である．私事にふれてまことに恐縮だが，このゲージ場という観点から電磁場や重力場，さらに電磁場に類似な場をはじめて，統一的に論じたのはいまから 20 年ほど以前の著者の論文である． それは一種の統一場理論である．このような観点が近年，外国で注目されてから急に世界中の流行となり， 最近は日本でも若い秀才たちがこぞって一般相対性理論の研究，応用に興味を持つようになった．さらに重力波やブラック・ホールの問題は空想科学小説にまでとりあげられ，いまや一般相対性理論は再び往年のようにブームとなりつつある．

このような動向は当然のことながら，出版界にも波及し，相対性理論に関する著書は外国では漸増しつつあるようにみえる．日本でも，外国の書物を翻訳したものは比較的多くでている．しかし日本人自身の手になる教科書はあまりない．本書の前身である“一般相対性および重力の理論”も後者に属する数少ない書物のひとつである．これは約 10 年ほど前，山内恭彦先生，畏友 中野董夫教授ならびに著者の 3 人の共著により，その初版が出された．それ以来予想以上に多くの人々に利用していただいた．しかし相対性理論の関与する分野に

おけるその後の研究の急速な進歩にともない，上記の書物の内容を大きく改訂する必要がでてきた．

今回，山内先生ならびに中野教授のお推めに従い，また裳華房の遠藤恭平氏の御要望に応えて著者が単独ではじめから書き直したものが本書である．書物の題名も簡単に“一般相対性理論”と改めた． 本書を以前のものと比べるとき，種々の特徴がある．まず，今回は特殊相対性理論に関しては読者は既にそれを習得しているものとして，これに関する概説は一切割愛した．また以前の書物では実験的検証について比較的長い説明を与えたが，本書ではこれをできるだけ簡単にすませた．そのかわりにブラック・ホールの問題と関連して，近頃急に注目をあつめるようになった Kerr の解（§44）を新たにつけ加えた．これは Einstein の方程式の厳密解のひとつであり，最近の研究のなかで特に注目すべき業績のひとつといえよう．第 8 章も相対性理論の普通の教科書には多分見あたらない内容のものと思う．特にスピノール算については，これに関して全く予備知識のない読者でも理解できるように，しかしなるべく手短かに解説した．またそれを用いた時空の分類についても述べた．これも日本の書物はいうまでもなく，外国の教科書でもあまり見かけない事項と思う．

“重力場の理論の正準形式”（第 10 章）も本書のひとつの特徴とすべき項目である．以前の著者たちの書物にも同じ題目の章があったが，今回は以前のものよりも，その論旨や説明がさらに簡明になっている．またこの形式の開拓者である Dirac の原論文に比べても，本書の方がより以上に明快で，説得力にまさると信ずる．

本書を理解するには，さきにも述べたように特殊相対性理論に関する大体の知識さえあればことたりる．テンソル解析にしても，スピノール算にしても本書の理解に必要な道具はすべて本書に解説してある．著者たちの以前の書物と同様に，本書でも著者の手引きで，読者自身が相対性理論を創りあげていくといったスタイルで話が展開されている．したがってじっくりと腰をおちつけて読めば，ちょうど推理小説でも読むように，一歩一歩と相対性理論の核心に進んで行く感じをもつことと思う．

この序を終えるにあたり，ここで本書の出版に種々御援助を頂いた方々に一言御礼を申し上げたい．まず第一に，以前の書物を書き直して全く新たに本書を出すというアイデアを与えられた山内先生ならびに中野教授，さらに終始，陰に陽に本書の出版に御尽力下さった遠藤氏に対し心から感謝の意を表する．相対性理論の書物にでてくる数式は沢山の添字をもった複雑なものが多く，印刷の関係者や校正係は多分，うんざりすることが度々あったと思うが，それにもめげず誤植を最少にとどめて下さった真喜屋実孜氏や印刷会社の方々の努力にはお礼の申しようもない次第である．

1978年6月

内　山　龍　雄

目　　次

第1章　一般相対性理論の基礎

第2章　テンソル解析

第3章　一般相対論的力学および電磁気学

第4章 重力場の方程式

第5章 不変変分論

第6章 重 力 波

第7章 Einstein 方程式の厳密解

第8章　Einstein 方程式の数学的性質

第9章　宇宙論への応用

第10章　重力場の理論の正準形式

記号一覧表

1) ギリシャ字の添字 $\lambda, \mu, \nu, \cdots$ 等： すべて 0, 1, 2, 3 を示す.

2) ラテン小文字の添字 $i, j, k, \cdots$ 等： すべて 1, 2, 3 を示す. ただし §50～53 は例外である.

3) ラテン大文字の添字 $A, B, C, \cdots$ 等： すべて 1, 2 を示す. このような添字がでてくるのは §51～53 だけである.

4) $\eta_{\mu\nu}$ ： Minkowski の計量テンソルを示す. この定義は

$$\eta_{\mu\nu}=\begin{cases} 1 & : \quad \mu=\nu=1,2,3 \\ 0 & : \quad \mu\neq\nu \\ -1 & : \quad \mu=\nu=0 \end{cases}$$

5) $\dfrac{\partial(x')}{\partial(x)}$ ： 関数行列式 $\dfrac{\partial(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}$ を表わす.

6) $T^{\mu\nu}$ ： 広義の物質系の対称エネルギー・テンソルを示す（103 ページ参照）. ただし第 5 章は例外である. そこでは $T^{\mu}{}_{\nu}$ は物理系の正準エネルギー・テンソル密度を示す（150 ページ参照）.

7) $M^{\mu\nu}$ ： 上の $T^{\mu\nu}$ と同様に広義の物質系の対称エネルギー・テンソルを示す（132, 175 ページ参照）.

8) $\boldsymbol{t}^{\mu}{}_{\nu}$ ： 重力場のエネルギー擬テンソル密度〔(28.34a), (22.8) 参照〕.

9) $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ ： アフィン係数である. 定義は

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}=g^{\lambda\rho}\Gamma_{\rho,\mu\nu}, \qquad \Gamma_{\rho,\mu\nu}=\frac{1}{2}(g_{\rho\mu,\nu}+g_{\nu\rho,\mu}-g_{\mu\nu,\rho})$$

10) ∇_{μ} ： 共変微分を示す.

$$\text{例}\qquad \nabla_{\mu}A^{\nu}\overset{d}{\equiv}\partial_{\mu}A^{\nu}+\Gamma^{\nu}{}_{\mu\lambda}A^{\lambda}$$

11) $R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu}$ ： Riemann-Christoffel の曲率テンソルである.

$$R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu}\overset{d}{\equiv}\partial_{\mu}\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\nu}-\partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\mu}+\Gamma^{\lambda}{}_{\tau\mu}\Gamma^{\tau}{}_{\rho\nu}-\Gamma^{\lambda}{}_{\tau\nu}\Gamma^{\tau}{}_{\rho\mu}$$

12) $$R_{\mu\nu}\overset{d}{\equiv}R^{\lambda}{}_{\mu\nu\lambda}=R_{\nu\mu}$$

13) $$R\overset{d}{\equiv}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$$

14) $$G_{\mu\nu}\overset{d}{\equiv}R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

15) Einstein の方程式： $R^{\mu\nu}-\dfrac{1}{2}g^{\mu\nu}R-\lambda g^{\mu\nu}=\kappa T^{\mu\nu}$ 〔(21.6) 参照〕

16) A_{μ} ： 電磁場の 4 元ポテンシャル（115 ページ参照）.

17) $f_{\mu\nu}$ ： 電磁場の強さを示す反対称テンソル（108 ページ参照）.

第1章　一般相対性理論の基礎

§1.　序　論

まず一般相対性理論* ができあがるまでのあらましについて述べる．19世紀の終りから20世紀のはじめにかけて，地球の絶対速度を測定しようとする種々の実験が試みられた．しかしこれらの実験の結果はすべて当時の物理学から推論される結果とくい違った．そこでこのくい違いの原因を説明し，なんとかつじつまを合わせようとする努力がいろいろとなされたが，そのような努力のうちで最も有名なものが Lorentz の収縮仮説である．このようないわば後向きの努力に対して，Einstein は従来の物理学に内蔵されていた独断的な考えを棄て，実験結果の示す自然の教えを真実として率直に容認すべきであると考えた．彼は多くの実験の教えることを2つの原理，すなわち相対性原理と光速度不変の原理としてとらえ，それらを指針として新しい物理体系をつくりあげた．これが相対性理論（後にこれは特殊相対性理論とよばれる）である．

この理論は，地球の絶対速度に関する実験と理論との上述のようなくい違いに決着をつけたばかりでなく，その後多くの実験事実によりその正しいことが実証された．これは従来の物理学の理論的構造を筋のとおった明快なものに作りかえたばかりでなく，光速に近いような速度が問題になる現象の究明には，それが欠くことのできない学問であることもわかった．特に素粒子物理学のように高速粒子が主役を演ずる現代物理学は，量子論とともに，特殊相対論の独壇場といえる．

このように素晴しい理論ではあるが，特殊相対論にもそれの有効性について限界がある．特殊相対論の基礎となった相対性原理（後に一般相対論ができあ

* 一般相対性理論および特殊相対性理論は，もとのドイツ語の Allgemeine Relativitätstheorie および Spezielle Relativitätstheorie の直訳である．しかしこの訳語は少し長すぎてわずらわしいので，普通には一般（または特殊）相対論と呼ばれている．本書でも見出し以外はこの簡略された訳語を使うことにする．

がってからは，この原理も特殊相対性原理とよばれるようになった）とは，すべての慣性系が同等であるという主張である．また特殊相対論とは物理学の法則を，どの慣性系からみても同じ形式となるようにかき表わしたものである．しかし慣性系に対して勝手な加速度をもって運動しているような座標系（これをこれから加速系とよぶことにする）は，この理論の考察の対象からはずされている．これがこの理論のひとつの適用限界である．もうひとつの弱点は，重力（昔は万有引力といわれた）の関与する問題を特殊相対論的にかきかえることがほとんど不可能であるということである．これらふたつの問題点は実は独立な問題ではなく，互いに深く結びついている．たとえば一様な重力場が存在するとき，このなかで慣性系を加速系と区別しようとしても，後に説明するように，それは原理的に不可能である．したがって重力の関与する現象を扱おうとすれば，特殊相対論の適用範囲からはみださざるをえないことになる．

Newton の万有引力の法則を特殊相対論の要請に合うように修正しようとする試みは，特殊相対論の誕生後いちはやく Poincaré や Minkowski, Sommerfeld たちにより試みられた．Newton の重力の法則によれば，1点から距離 r だけ離れた第2の点に，r^{-2} に比例する重力が瞬間的に到達する．これはすべての作用の伝播速度が光速度 c より速くはなりえないという特殊相対論の主張にそむくものである．そこで重力が距離 r を伝播するのに r/c だけの時間が必要となるように，Newton の法則をかきかえようというのが Poincaré たちの基本的な考え方である．Newton の引力の法則はもともと空間的に有限の距離だけ離れた2点に関係する量を扱うので，形式的にも概念的にも種々の困難をともなう．たとえ，それを相対論的にかきかえることに成功したとしても，取扱いがむずかしいという事情は変わらない．むしろ Newton の法則を，重力場という概念の助けをかりてつぎのような2組の方程式にかき表わすほうがより便利であり，また近代的といえる．いま重力場をうみだす源の物体の質量密度を ρ，重力場のポテンシャル（これを Newton ポテンシャルともいう）を ϕ とすると

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho. \tag{1.1}$$

G は Newton の重力定数，あるいは万有引力定数とよばれる．この重力場のなかで運動している質量 m の質点の位置を $\vec{x}$ とすれば

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -m\,\mathrm{grad}\,\phi. \tag{1.2}$$

重力の法則を相対論的形式にかきかえるには，Poincaré たちの採った考えかたよりも，むしろ上述の 2 組の式を Lorentz 変換に対して不変な形式に修正することを検討する方がまだましであろう．

このような考えに従って Nordström は Lorentz 変換に対して不変な重力場の理論を作りあげた．彼の理論によれば，たとえ重力場が存在しても特殊相対論は厳密に成立する．したがって光の真空中を伝播する速さは，たとえ重力の影響下にあっても，常に c である．それゆえ遠方の恒星からの光は太陽の近くを通過する際にも屈曲しない．これはあきらかに観測事実に反する．またこの理論によれば，水星の近日点移動は観測値と反対符号になる．そのうえ，この理論は，Einstein の特殊相対論と同様に慣性系だけに適用できるという理由で不満足なものである．

一方，Einstein は特殊相対性原理を拡張し，相対性理論を加速系に対しても適用できるように一般化することを考えた．すなわち物理法則は，慣性系のみならず，これに対して任意の運動をしているどんな座標系からみてもその数学的表現形式が同じであるべきであると考えた．この主張は **一般相対性原理** とよばれる．この主張が原理として役立ったのは，その陰に **等価原理** と呼ばれる大きな支えがあったからである．等価原理とは一様な重力場内にある慣性系からながめたときの物理法則が，重力は存在しないが，慣性系に対して適当な，一定の加速度をもって運動をしている加速系からながめた場合の物理法則と全く同じであるという主張である．この主張を力学現象にかぎるならば，われわれのよく知っていることである．Einstein はこれを全物理現象にまで拡大した．その結果，一様な重力場が力学以外の現象にどのような影響を与えるかという問に答えることが可能となった．その主な結論をならべると，重力ポテンシャルの高い所と，低い場所とでは同じ構造の時計でもその進みかたが原理

的に異なり，ポテンシャルの低い所に置かれた時計は高い所におかれたそれより進みかたが遅い．光の速さについても上述の2つの場所では，低い所における光速の方が高い所におけるそれよりも遅い．また慣性質量と重力質量とは等しい．これらの諸結果については，また後に再びくわしく説明する．ここでは，上述のすべての結果が経験事実によって実証されたということを付記するにとどめる．

上に述べた一様な重力場に関する理論とそれから導かれた結論は特殊相対論のワクをのり越え，はみだしたものである．たとえば，真空中における光の速さが一定ではなく，重力ポテンシャルの高低に応じて，光の速さも変化するということは，特殊相対論のワクを越えた最も顕著な例である．そこで上述の2つの原理を基礎として重力理論をどのように創るべきかがつぎの問題である．さらに，一様でない一般の重力場にも適用できるような理論を創らねばならない．

Einstein と Abraham は重力ポテンシャルの高低に対応して光速 c もその値を変えることに着目し，c を時間ならびに位置の関数とみなしこれを重力ポテンシャル φ の身がわりとして使うことを考えた．しかしその結果は彼らの努力にもかかわらず不成功に終った．

最後に Einstein は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ $(\mu,\nu=0,1,2,3)$ に目をつけた．4次元時空のなかに任意の曲線座標系を設けると，時空内にある互いに隣接した任意の2点の座標差を dx^μ とするとき，これら2点の間の距離の2乗 ds^2 は，Riemann 幾何学によれば，$ds^2=\sum g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ で与えられる．この係数 $g_{\mu\nu}$ が計量テンソルと呼ばれるものである．これは一般には時空内の点の座標 x の関数である．Einstein は，これが重力場と密接な関係にあることに気づき，この10個の成分をもつ量を一般化された重力ポテンシャルと考えた．さらに彼は物理法則を表わす種々の方程式が，$g_{\mu\nu}$ を用いるとすべて任意の座標変換に対して不変な形式にかき表わされることも発見した．それは，物理学的にみれば，$g_{\mu\nu}$ によって表わされた重力場のなかにおける物理法則の数学的表現を発見したことにほかならない．さらに重力場がその源の物体によってどのように作り

だされるかという問題も，$g_{\mu\nu}$ 自身の満たすべき場の方程式をみつけることにより解決された．この方程式も，Newton の万有引力の法則を手本にして，また一般相対性原理の要請にしばられて，ほとんど一意的にその解答が導かれた．これが一般相対論のなかで最も重要な方程式である．これは Newton の重力理論の方程式（1.1）に対応するもので，Einstein の方程式とよばれる．要するに重力場の影響のもとに質量をもつ物体や，電磁場がどのような振舞をするかを規定する法則，また逆に質量をもつ物体や電磁場がどのような重力場をうみだすかという法則がいずれも任意の座標変換に対して不変な形式でかき表わされた．前者は（1.2）の一般化であり，後者は（1.1）の相対論的かきかえに相当する．このようにして Einstein は相対論的な重力理論を完成した．これが有名な**一般相対性理論**である．以上で一般相対論のできあがるまでの歴史的あらましは終りにする．

§2. 一般相対性原理と等価原理

物理学は，時間および空間というワク，数学的にいえば4次元連続体のなかにおける対象の配位の変化という形ですべての現象を記述する．* もっとはっきりいえば現象に参画する物体の各部分が**時空**とよばれる連続体のなかにどのような歴史的軌跡をえがくかを追跡することが物理学の仕事である．そのためにはあらかじめ空間のいたる所に上下，縦横に格子状にワク組みをこしらえ，各格子点には3個の数からなる“住居標”を添付する．さらに各点に精巧な時計もしばりつけておく．このように準備したうえで，たとえば1個の陽子の運動をしらべるとしよう．

それには，陽子が通り過ぎた道の上の各点における住居標とそこを通り過ぎたときの時計の示す時刻をすべて記録すればよい．それによって陽子の運動は完全に把握される．この場合，つぎのことが前提となっている．すなわち，各瞬間に陽子が，あらかじめ空間内に設けられた格子点のうちのいずれと一致す

---

* たとえば，静止している物体の温度だけを問題にするときは，本文の主張に反するようにみえる．しかしこの場合でも実は，その物体内の各点に，たとえば小さな水銀寒暖計が備えつけてあると考え，その水銀面の位置を時間的に追跡すると考えれば，これは本文の範疇にはいる．

るかが，いくらでも精確にわかるものとしてある．これは時間も含めて，時空連続体内の1点と陽子との **一致**（coincidense）をいくらでも精確に確かめることができるという仮定である．この仮定は量子力学的現象の場合，また物指や時計の原子的構造が問題になる場合には，無条件に容認するわけにはいかない．しかし後にも述べるように，一般相対論がその威力を発揮する超巨視的，天文学的スケールの世界では，この仮定は容認できるものであり，これは一般相対論の基本的仮定のひとつである．

ところで各格子点に賦与された3個の数字からなる住居標をその点の空間座標という．もし時間も含めるならば，4次元連続体内の各点の位置を指定するには4個の数が必要となる．その場合，この4個の数をその点の **4次元座標** とか単に **座標** とよぶ．上の説明ではいかにもリアリスティックに，格子状のワク組を設けて，空間点の座標をきめたが，そのようなことは必ずしも必要ではない．要は，時空とよばれる連続体内の各点に適当に4個の数を賦与し，それによって点を識別できれば十分である．そのように連続体内の各点に座標を賦与した場合，われわれは，そこに **座標系** を設けたという．ところで連続体の全体をひとつの座標系でおおうことが必ずできるとは限らない．またそのようにする必要もない．一般には連続体をいくつかの部分域に分け，各部分ごとにそこに適した座標系を設ければよい．ただ隣りあった領域の境界近くでは，両座標系が重なりあうようにしておけば，両領域の間の関係を論ずる場合に便利である．

座標系を設けるには，その本来の目的である，点の識別が可能である必要がある．しかしその上に一意性と連続性も必要な条件である．すなわち，時空内の各点にはそれぞれに異なった座標が対応しており，逆に座標を指定すれば，それに応じて時空内の1点がきまる必要がある．これが一意性である．また連続性とはつぎのことである．ある粒子の運動は時空内の1本の連続曲線によって表わされる．これを粒子の **世界線** という．どのような曲線でも，その上の各点には座標が連続的に賦与されていなければならない．そうでないと，たとえば粒子の運動を，その座標を使って表わす際に大きな不便が生じるからであ

る．これが座標に対する連続性の要請である．

一意性と連続性の条件を満たす座標系ならば物理現象を記述するためには，それで十分ではあるが，座標系の選び方によって，物理法則を表わす数式が複雑になったり，簡単になったりすることは当然である．考えうる種々の座標系のなかで最も好都合なものが慣性系であることはよく知られている．**慣性系**とは，それを基準にとったとき，力学現象について Newton の法則が厳密に成り立つような座標系である．逆に，ある座標系が慣性系であるかどうかは，それを基準にとったとき，Newton の力学の法則が正確に成り立つか否かを調べることにより判断できる．特殊相対論によれば，いかなる慣性系をとっても，力学の法則ばかりでなく，すべての物理法則が同じ数学的表式で表わされる．もし慣性系以外の座標系を基準にとれば，それが慣性系に対して加速度運動をしていることに起因するみかけの力が生じる．このみかけの力の効果を考慮にいれてはじめて，現実を正しく表現する物理法則の数式化が可能となる．

以上に述べたことは重力が存在しないときには，確かに正しい．しかし重力が存在するときは，慣性系か否かの判断が不可能になる．このことは有名な **Einstein の箱の思考実験**を思いおこせば容易に理解できよう．いま宇宙の無限の彼方にひとつの箱が，文字どおり宙に浮いているとする．それが宇宙にあるすべての天体からあまりにも遠く離れているので，重力も含めて，いっさいの外力が箱には作用していない．箱の中にいる人は，持っていたりんごを手放したにもかかわらず，それが宙に浮いたまま静止していることから，箱の中に設けた座標系が慣性系であることを知ったとする．つぎに箱の外の人が箱の天井に縄をつけ，“上向き”に一定の加速度で引きずったとしよう．このとき，中の人はりんごが急に一定の加速度で床に向かって落下するのを発見するであろう．この場合 Newton 力学とか，特殊相対論の立場からみれば，箱の中に固定された座標系はもはや，慣性系とはいえない．なぜなら，それから眺めると，りんごは外力が作用していないにもかかわらず加速度運動をするからである．

話をもとにもどして，もとの箱が宇宙のはてにうまい仕掛けで固定されているとする．またこの中に固定された座標系はりんごの実験によって，前と同様

に，それが慣性系であることが確かめられてあるとする．いま突然，1個の恒星が箱の床下を通り過ぎたとしよう．そのとき箱の中で，持っていたりんごを手放せば，りんごは，上に述べた縄にひかれる箱の場合と全く同じように，床に向かって落下するであろう．しかしこの場合は，りんごは重力という外力の作用のもとに Newton の法則に従って落下運動をしているのだから，この座標系は慣性系である．しかし箱の中にとじこめられて，全く外界を見ることのできない人にとっては，りんごの運動はいずれの場合にも全く同じであるから，両座標系の違いを発見することは不可能であろう．むしろ，第1の話，すなわち縄に引かれた箱の場合でも，中にいる観測者が，第2の話と全く同じように，箱の中の座標系を慣性系と思い，りんごの落下現象はそれが重力の影響のもとにあるためだと考える方が自然であろう．要するに無重力地帯の中で慣性系に対して加速度運動をしている座標系と，この加速度と逆向きの重力が存在する空間の中に固定された慣性系とは，少くとも力学現象だけに限るならば，両者を区別することは不可能である．

上に述べたことは，われわれが既に Newton 力学で習ったことである．しかし Einstein は，上述の2つの座標系の区別ができないという結論が単に力学現象のみならず，いかなる物理現象についても，成立すると考えた．この考えを彼は原理としてとりあげた．これが**等価原理**である．これは一般相対論を創る際の基本的な要請である．この原理については，その主張を後でもう一度正確に述べる．ところで等価原理を認めるならば，一様な重力場のなかに設けられた慣性系と，無重力地帯のなかを慣性系に対して一定の（重力と逆向きの）加速度をもって運動している加速系とを識別することは原理的に不可能となる．したがって議論を慣性系だけに制限しようとしても，それは許されない．それゆえ，特殊相対論のように，慣性系同士のあいだの Lorentz 変換だけを考えていたのでは不十分であり，重力を問題にする以上は，慣性系と加速系のあいだの座標変換も取扱わざるをえない．

そこで Einstein は，特殊相対性原理の代りに，それを拡張した**“すべての物理法則は，どのような座標系を基準にとっても，その数学的表**

現が同じである”という主張を指導原理として採用した．これが**一般相対性原理**である．これを後に説明するテンソル解析の言葉を用いていいかえれば，**“すべての物理法則は，任意の座標変換に対して共変な形式でかき表わされる”**という主張となる．したがって，この原理を**一般共変性の原理**と呼ぶ方がむしろその内容に適していると思う．しかしこの原理だけでは具合が悪い．それはつぎのことを考えてみればすぐにわかる．いま前に述べた Einstein の箱の実験の第一の話をもう一度想いおこしてみよう．はじめ箱が宇宙の重心に対して静止していたときは，箱の中の座標系は慣性系であった．このことは箱の中で，りんごを手放しても宙に浮いており，Newton の力学の法則の教えるとおり，外力は0，りんごの加速度も0であるという事実からわかる．つぎに箱に縄をつけて一定の加速度で引きずると，今度は，外力は0であるにもかかわらず，りんごは一定の加速度で，床に向かって落下しはじめる．したがって Newton の力学の法則はこのままでは成り立たない．つまりこれは一般相対性原理に反する例である．しかしここでさきに述べた等価原理をも併用するなら，りんごに作用している見掛けの力は，本物の重力に昇格される．したがってりんごは重力の作用のもとに落下するのであるから，Newton の法則はこの縄付きの座標系でも厳密に成立することになり，一般相対性原理もその正当性を回復する．このように等価原理の助けをかりてはじめて，一般相対性原理はその有効さを発揮できる．

ここで等価原理について説明しよう．さきにも述べたようにすべての物理現象に対する一様な重力場の影響は，重力がなくとも，基準にとる座標系に，問題の重力と逆向きの加速度をもつ運動をさせることにより再現できる．また逆に重力場のなかで，その影響のもとに自由落下する箱を考え，この箱の中に座標系を設ければ，この座標系を基準にとるとき，箱の中では重力は完全に抹消される．もし問題の重力場が空間的に一様でないときは，少くとも箱のなかに限るとき重力が一様であると見なせるほどに箱の大きさを小さくすればよい．また重力の強さが時間とともに変化するときは，問題にする時間をできるだけ短くして，その間では重力が一定と見なせるようにすればよい．このようにす

れば“一様”な重力という制限はとり除くことができる．このように考えると**等価原理**はつぎのようにいい表わすことができる：**いかなる重力場でも，時空内の任意の点の近傍で，そこに適当な座標系を設けるとき，それを基準にとれば，その点の近傍の重力場を完全に消し去ることが必ずできる**．この主張を裏がえせば，任意の世界点の近傍で，適当に座標系を設けそれを基準にすれば，任意のタイプの重力場をそこに作りだすことも可能となる．

ところで，重力が存在しないときは特殊相対論が有効であるということについては既に述べた．しかし重力場のなかではどのような物理法則が存在するかは，すぐには答えかねる．だがこの場合にも等価原理と一般相対性原理を併用し，さらに上述の**無重力のときは特殊相対論の主張が厳密に成り立つ**という事実を大前提として採用するならば，重力場自身の問題を別にするかぎり，与えられた重力場のなかにおけるすべての物理現象に対する法則は，なんら任意性のはいりこむ余地もなく，一意的に導かれる．

§3. 慣性質量と重力質量，光線の屈曲

等価原理の第1の応用例として，すべての物体の**重力質量**（厳密にいうならば**受動的重力質量**）と**慣性質量**が等しいことを示そう．

いま地上に固定された直交座標系 (x, y, z) を x-系，箱 ABCD の中に固定された座標系 (X, Y, Z) を X-系と呼ぶことにする（**第1図**参照）．x-系ならびに X-系の用いる時間座標をそれぞれ t および T とし，$t=0$ のとき $T=0$ とする．またこのときは箱の底面 BC は地上から高さ h の場所にあったとする．いま慣性質量 m_i の質点 P が地球の重力の作用のもとに自由落下をしているとする．x-系は慣性系であるから，この系からみた P の運動方程式は Newton の法則により

$$m_i \frac{d^2z}{dt^2} = -F \tag{3.1}$$

である．F は P に働く重力である．

一般に地上の物体に働く重力は物体に固有な量 m_G に比例することが経験的に知られている．この比例定数を g とかけば，質点 P については

$$F = m_G g \qquad (3.2)$$

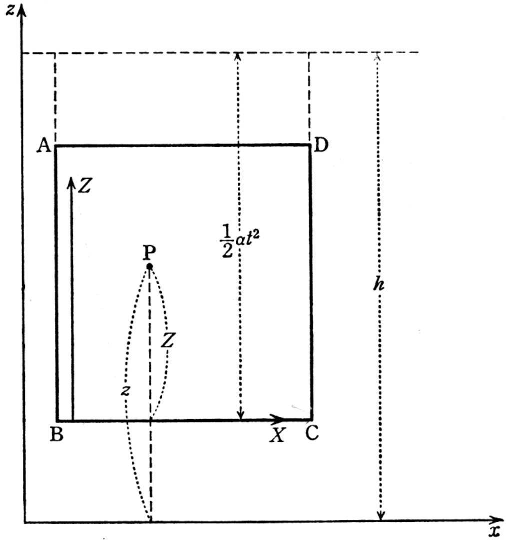
の形に表わされる．m_G を質点 P の重力質量という．*

いま箱を一定の加速度 α をもって落下させたとすると，第 1 図から明らかなように，P の座標 Z と z の間には

$$Z = z - \left(h - \frac{1}{2}\alpha t^2\right),$$

$$T = t, \qquad (3.3)$$

という関係がある．これを使って (3.1) を X-系の量でかき表わすと



第 1 図

$$m_i \frac{d^2 Z}{dT^2} = m_i \alpha - m_G g \qquad (3.1)'$$

となる．いま箱の降下加速度 α を適当にとった結果，X-系からみたとき，P に働く重力が消えたとする．これは X-系が P の無重力系であることを意味する．この場合には (3.1)′ から

$$m_i \alpha = m_G g, \qquad \text{あるいは} \quad k \overset{d}{\equiv} \frac{m_G}{m_i} = \frac{\alpha}{g} \qquad (3.4)$$

という関係が成立する．

ところで等価原理によれば，P に働く重力が X-系からみて 0 となるときは，他のいかなる物体についても，それに働く重力も 0 となるはずである．し

* 実測できるものは F である．これを (3.2) のような 2 個の量の積にかくとき，このように分割する仕方はいくらでもある．したがって g の大きさはもちろんのこと，そのディメンションさえも勝手に選ぶことができる．

たがって，P 以外の任意の物体の重力質量を m_G'，慣性質量を m_i' とし，それらの比を $k' \stackrel{d}{\equiv} m_G'/m_i'$ とおくとき，これについても (3.4) と同様に

$$k' \stackrel{d}{\equiv} \frac{m_G'}{m_i'} = \frac{\alpha}{g} \tag{3.4$'$}$$

が成立するはずである．つまり $k = m_G/m_i$ は，すべての物体について共通な値 α/g に等しい．そこで特に比例定数 g を箱の落下の加速度 α に等しくとれば（11 ページの脚注参照），すべての物体について $m_G = m_i$ となる．

上述の話からわかるように，重要なことは $k = 1$ となることではなくて，k が物体によらず一定であるということである．

k が物体に無関係であることは，相対論の誕生以前に既に Eötvös により実験的に証明された．いま 2 個の物体 A, B の k をそれぞれ $k(A)$, $k(B)$ とおく．これらの比を

$$\frac{k(A)}{k(B)} \stackrel{d}{\equiv} 1 + \eta$$

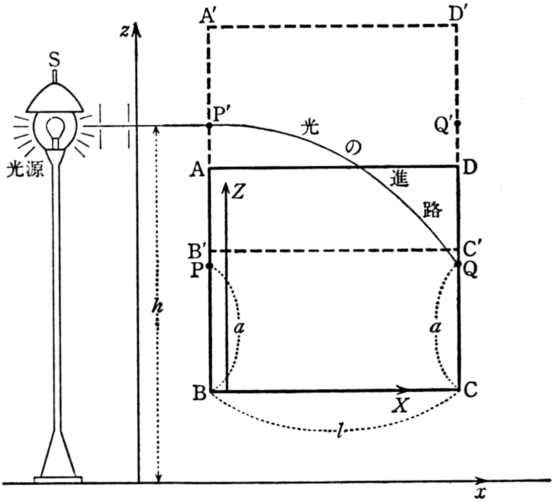
とかくとき，彼のはじめの実験では $\eta \sim 1.2 \times 10^{-6}$ という答が出た．その後実験精度があがり，$\eta \sim 2 \times 10^{-9}$ という結果が導かれた．さらに 1960 年代にはアメリカの Princeton 大学の Dicke たちが実験方法を改良して，金とアルミニウムを用いて

$$\frac{k(\mathrm{Al})}{k(\mathrm{Au})} = 1 + \eta$$

とおくとき，$|\eta| < 3 \times 10^{-11}$ という結果をだした．このように高い精度で k が物質によらず一定ということが実証されたことは，とりもなおさず，等価原理の正当性が実験的に証明されたことを意味する．

等価原理の第 2 の応用例として光の進路に対する重力の影響をしらべてみよう．**第 2 図** のように箱 ABCD が地球の重力の作用のもとに自由落下しているとする．箱の壁 AB の中央にある小孔 P（箱の底からの高さ a）が地上からの高さ h の位置 P′ まで降下したとき，光源 S からの光が P を通して，箱の中にいる人からみて，水平に箱の中にさしこんだとする．箱の中に設けた X-系を基準にとれば，箱の中は無重力地帯である．したがって，そこでは特殊相対

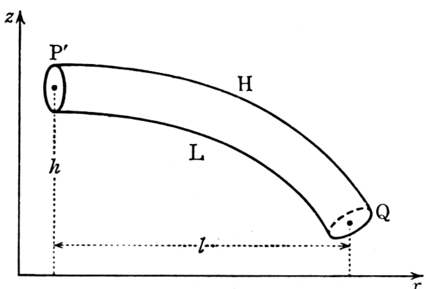
論が成立する．それゆえ，P から水平に入射した光は，光速 c で直進し，向かい側の壁 CD の中央（底からの高さ a）にある点 Q に到達する．



第 2 図

これを地上に設けた x–系からながめてみよう．光が箱に入射した点は地上からの高さ h の点 P′ である．光が箱の横幅 l を進むには l/c だけ時間がかかる．このあいだに箱は，非相対論的近似では $g(l/c)^2/2$ だけ降下する．したがって x–系からみた光の進路は第 2 図に示した放物線 P′Q である．つまり重力場の中を光が進むときは，あたかも質量をもった物体の場合と同様に，放物線を描く．

いま P から箱の中に入射した光線を拡大してみよう．それは**第 3 図**のように管状をした光線の束である．これが図のように屈折するということは，束の下側（L）を進む光の速さが，束の上側（H）を進む光のそれより遅い



第 3 図

ことを意味する．つまり真空中でも，地表に近い点を通る光ほど遅い．あるいは，重力のポテンシャルの低い場所を進む光は，高い場所を進む光より遅いという結論がうまれる．

特殊相対論では真空中を伝播する光の速さは，時空内のどの点でも常に一定の値 c であった．この事実を利用して，離れた場所にある時計を同時刻に調整するとか，剛体の物指を使わなくとも，光を往復させて2点間の距離を測定することができた．しかし重力場が存在する領域では，もはやそのような操作は不可能となる．

上述の光線の屈折は，真空中でも重力の作用している領域では，光の屈折率が1でなく，重力ポテンシャルが低いほど，屈折率が大きくなると解釈することができる．物質中で光の屈折率が1と異なるのは光と物質の相互作用による．重力の場合にもこれと同様に，屈折率が1と異なるのは光と重力場の相互作用にもとづくと考えてよい．ところで従来の幾何光学では真空中で1点 A から他の点 B まで光が伝播するとき，その光路は AB を結ぶ最短曲線（Euclid 空間では直線）であると教えられた．この教えを x–系からみた光の進路，つまり重力場のなかにおける進路に適用すると，重力場のなかの P' と Q を結ぶ最短曲線は近似的に放物線であるということになる．これは空間が歪んでいることを意味する．正確にいえば，重力場のなかでは Euclid 幾何学が成立しないことを示している．つまり重力場は空間内に歪みをひきおこし，その結果，そこを通る光線が屈折すると考えたらよいのかもしれない．Einstein はもっと革命的なことを考えた．すなわち歪んだ状態にある4次元時空の領域は，物理的にいえば重力場の存在する時空域であると考えた．したがって時空の歪みを表わす幾何学的量が，同時に重力場の様子をも表わすことになる．このような考え方は物理学の幾何学化とよばれる．元来，数学とはすべての科学の中で，その構造が最も美しいものとされていた．特に幾何学は，大昔からこれを公理論的に創りあげようという試みがなされ，数学のなかで最も美しい体系の分野とされていた．したがって物理学も，できればその形式だけでも，この美しい幾何学に還元したいという願望が物理学者の心のうちに昔からあった．

Einstein が重力を時空の幾何学的性質であると考えたのも，このような願望が彼の脳裏に潜在したためかもしれない．

ともかくいままでは特殊相対論においてさえも，時空の幾何学的性質は自然科学の対称ではなかった．しかし一般相対論では，時空の幾何学的性質は重力場によって表わされる．それは先験的にきまったものではなく，時空の中に散在する物質により規定され，同時にまた物質の行動を規制する．このように考えると，一般相対論は Newton の理論にかわるべき新しい重力理論であり，同時にそれは時間空間の構造を扱う物理学であるともいえる．

なお重力とは時空の状態であるという Einstein のこの考えに従うとき， 何ゆえに時空内の万物がすべて重力の作用をうけ，また重力の源泉となるかという疑問にはじめて解答があたえられる．なぜなら物体が時空内にあるということは重力場と相互作用しているということと同意語であるからである．

§4. 重力による時間のおくれ，赤方偏移

前節で述べたように，重力場の存在する所では Euclid 幾何学も使えないし，光速度も c とはならない．したがって特殊相対論で用いた諸概念や，それの観測法，定義についてはあらためて検討する必要がある．たとえば時間とか， 2 点間の距離という言葉はどのように解釈すべきか考え直さねばならない．そのような問題に対する解答の鍵は等価原理である．すなわち，まず問題になっている世界点 P の近傍に， 座標系を適当に設け， それを基準にしたとき，少くとも P の近傍では重力が消滅するように座標系 (X, Y, Z, T) を設ける． このような座標系を今後，点 P における **局所無重力系** とよぶことにしよう．このような好都合な系は等価原理により必ず存在する．これを基準にとれば，重力が存在しないから， 何度もいうように， P の近傍では特殊相対論の諸概念，それの定義，観測法がすべて有効となる． したがって上述の X, Y, Z, T がそれぞれ直交空間座標，および時間座標を表わすように選ぶことができる．このように選定された局所無重力系を特に， P における **局所 Lorentz 系** とよぶことにする．

局所 Lorentz 系を現実に設けることはわけのないことである．何度も述べたように，まず P の近くで小さな箱を重力の作用のもとに自由落下させる．箱のなかに直交座標系を設ければ，これがまさに局所 Lorentz 系である．場所により重力の強さが著しく変わるときは，箱をできるだけ小さくとればよい．厳密にいうならば，箱の大きさは無限小にとるのが本当であろう．ともかくこの箱のなかだけが無重力地帯として扱ってよい領域である．

このような局所 Lorentz 系を用いれば時間とか空間的距離，あるいは2個の世界点（ただしいずれも上述の箱のなかにある）のあいだの4次元的不変距離 $\varDelta s$ が何を意味するかは，既にわれわれのよく知っていることである．そこで一般相対論でもこのような用語を用いるときは，必ず問題にしている世界点の局所 Lorentz 系にたちもどったうえで，その値を定義するなり実測するものとする．このように約束すれば，特殊相対論の諸概念は，各世界点の近傍内ではそのまま使用できる．

しかし有限の距離だけ離れた2個の世界点のそれぞれに在る量を比較する場合は上述の操作だけでは不十分である．いま静的重力場が存在する空間の領域を V として，そのポテンシャルを $\phi(x, y, z)$ とする．V の中の1点 P_1 を出発点として初速0で，小さな箱が重力の作用をうけて自由落下をはじめたとする．ある時間ののち，箱は V のなかの第2の点 P_2 を，P_2 に対して速さ v で走り過ぎたとする．いま P_1, P_2 にはそれぞれ時計 W_1, W_2 が固定されているとし，これらの時計の進み方を比較してみよう．

まず箱の中に直交系を設けよう．この系からみれば，箱の中は無重力地帯だから，この系は局所 Lorentz 系である．そこで箱の中に固定した第3の時計 W_3 を使って W_1 と W_2 の針の進み具合を比較する．まず最初箱が P_1 の近くにいたときは箱の中の系は P_1 における局所 Lorentz 系である．しかも箱は W_1 に対して初速0であるから，W_1 が $\varDelta\tau_1$ だけ進むあいだに W_3 の針が $\varDelta\tau_3$ 進んだとすると

$$\varDelta\tau_1 = \varDelta\tau_3 \tag{4.1}$$

である．ところで W_3 は無重力系の中に固定された時計であるから，その進み

方は常に一定である．箱が P_2 の傍を走り過ぎるときは，この箱の中の系は P_2 の局所 Lorentz 系である．しかし W_2 は，W_3 に対して速さ v で箱の速度と逆向きに W_3 の傍を走り去る．したがって W_3 が $\varDelta\tau_3$ だけ時を刻むあいだに W_2 の針が $\varDelta\tau_2$ だけ進んだとすると，箱からみて（特殊相対論により）

$$\varDelta\tau_2 = \varDelta\tau_3\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \tag{4.2}$$

という関係が成り立つ．(4.1)，(4.2) から $\varDelta\tau_3$ を消去すると

$$\frac{\varDelta\tau_2}{\varDelta\tau_1} = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} < 1. \tag{4.3}$$

いま W_3 の速さ v が c よりはるかに小さいなら，Newton の力学が使える．そこで P_1, P_2 における重力ポテンシャルをそれぞれ ϕ_1, ϕ_2 とする．上の説明から $\phi_1 > \phi_2$ である．Newton 力学におけるエネルギー保存則から

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{1}{2}v^2. \tag{4.4}$$

これを (4.3) に代入し，$(v/c)^2 \ll 1$ という仮定を使うと

$$\frac{\varDelta\tau_2}{\varDelta\tau_1} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1 - \frac{\phi_1-\phi_2}{c^2},$$

あるいは

$$\frac{\varDelta\tau_1 - \varDelta\tau_2}{\varDelta\tau_1} \approx \frac{\phi_1 - \phi_2}{c^2} > 0 \tag{4.5}$$

となる．すなわち重力ポテンシャルの低い点に置かれた時計ほどその固有時の進み方がおそい．

(4.5) を地球表面のごく近くの点に適用してみよう．いま P_1 は地上からの高さ h の点，P_2 はその鉛直下の地上の点とする．いま地表近くでの重力の加速度を g とすれば

$$\phi_1 = gh, \qquad \phi_2 = 0.$$

したがって (4.5) は

$$\frac{\varDelta\tau_1 - \varDelta\tau_2}{\varDelta\tau_1} \approx \frac{gh}{c^2} \tag{4.5$'$}$$

となる．つまり高い場所に置かれた時計ほど速く時を刻む．

つぎに P_2 から光が連続的に点 P_1 に向けて放射されているとする．これを W_3 の固定された局所 Lorentz 系からながめると光は速さ c で P_2 から P_1 に向かって進む．いま W_3 が $\varDelta\tau_3$ 秒たつ間に P_2 から n 個の波が発射されたとする．局所系からみて波は定常的に伝播しているから点 P_1 に達する波の数も $\varDelta\tau_3$ 秒間にやはり n 個である．さて，光源 P_2 で時計 W_2 を用いてこの光の振動数 ν_2 を測ると

$$\nu_2=\frac{n}{\varDelta\tau_2}=\frac{n}{\varDelta\tau_3\sqrt{1-(v/c)^2}}\approx\frac{n}{\varDelta\tau_3}\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right).$$

一方，受光点 P_1 において，時計 W_1 を用いてこの光の振動数を測ったとする．W_3 が $\varDelta\tau_3$ 秒たつ間に W_1 は $\varDelta\tau_1$ 秒だけ進むから，W_1 の測定した振動数 ν_1 は

$$\nu_1=\frac{n}{\varDelta\tau_1}=\frac{n}{\varDelta\tau_3}.$$

したがって

$$\frac{\nu_2-\nu_1}{\nu_1}\approx\frac{\phi_1-\phi_2}{c^2}. \tag{4.6}$$

つまり，同じ光でも，重力ポテンシャルの低い所（P_2）におけるその振動数 ν_2 に比べ，ポテンシャルの高い所（P_1）における振動数 ν_1 の方が小さくなる．たとえば，あるきまった色の光を地表から天空に向けて発射したとき，これを観測する場所が地表から遠ざかるほど，その色は赤くみえる．そこでこの現象を重力による光のスペクトルの**赤方偏移**という．

以上の結論は実験的にその正しいことが証明された．まず太陽から発射された光を地球上で観測したとき，太陽の重力によるスペクトルの赤方偏移について考えてみよう．この時は上述の点 P_2 は太陽表面の点と考え，光の観測点 P_1 は地球とする．したがって ϕ_2 は太陽の重力ポテンシャルの太陽表面における値を示す：

$$\phi_2=-\frac{GM_{\odot}}{R}.$$

ここで G は**万有引力定数**で

$$G=(6.670\pm 0.005)\times 10^{-8}\quad \mathrm{cm^3\cdot g^{-1}\cdot sec^{-2}}.$$

$M_{\odot}$ は太陽の質量，R はその半径である：

$$M_{\odot}=1.996\times 10^{33}\,\mathrm{g},\qquad R=6.96\times 10^{10}\,\mathrm{cm}.$$

また地球と太陽の間の平均距離を r とすると，$r\approx 1.49\times 10^{13}\,\mathrm{cm}$ であるから，地球上の観測点における太陽の重力ポテンシャル ϕ_1 は

$$\phi_1=-\frac{GM_{\odot}}{r}\approx\phi_2\times 5\times 10^{-3}.$$

そこで太陽面における光の振動数を ν_2，この光が地上に到達したとき，それを地球上で観測した値を ν_1 とすれば

$$\frac{\nu_2-\nu_1}{\nu_1}\approx\frac{1}{c^2}(\phi_1-\phi_2)\approx-\frac{1}{c^2}\phi_2=\frac{GM_{\odot}}{c^2R}\approx 2.1\times 10^{-6} \tag{4.7}$$

という理論値が求まる．

太陽からの光について赤方偏移の理論を検証することは，実際には種々の邪魔な要素がはいり込み，大変むずかしい実験のようである．しかし現在までに得た結果をまとめると理論値（4.7）の正しいことが実証されたと考えてよい．

上述のように他の天体からの光を用いて赤方偏移の実験をすることは，一般に大きな困難をともない，精度はよくない．もし地球上の光源を使って，実験室内でこの実験ができれば，多分精度の高い実験が期待できよう．しかし地上では gh/c^2 があまりにも小さいので従来は実験不可能であった．ところが1960年，Pound と Rebka は Fe^{57} の γ 線を使い，高さ $h=22\,\mathrm{m}$ の塔を利用して，公式（4.6）に従う赤方偏移があるか否かを実験した．（4.6）によれば

$$\frac{\nu_2-\nu_1}{\nu_1}\approx\frac{gh}{c^2}=2.5\times 10^{-15}\ (\text{理論値})$$

という小さな値になる．しかし彼らは Mössbauer 法を用いて，振動数のこの小さな変化を観測した．彼らの得た実験値と，上の理論値を比べると（実験値)/(理論値) $=1.05\pm 0.10$ である．したがって理論の正しいことが実証されたと考えてよい．なお彼らの実験は，赤方偏移について今まで行われたすべての実験のなかで最も精度の高いものである．

§5. 計量と重力ポテンシャル

§1でも述べたように，Einstein は重力のポテンシャルを時空の計量テンソルを用いて表わすことを考えた．これについて以下に説明しよう．

重力場が存在する時空の或る領域 Ω に任意に座標系を設けたとする．これを x-系とよぶことにする．いまこの領域内の任意の点Pにおいて局所 Lorentz 系（これを X-系とよぶことにする）を設けたとしよう．したがってPの近傍の世界点は2重に座標が与えられたことになる．すなわちPの近傍の任意の点の x-系，ならびに X-系からみた座標をそれぞれ x^μ，X^μ $(\mu=0,1,2,3)$ とする．ただし $X^0=cT$ は X-系の時間座標である．いずれの座標系も一価，連続の要請を満たしているはずであるから，x と X の間には

$$X^\mu = f^\mu(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3) \overset{d}{\equiv} f^\mu(x) \qquad (\mu=0,\cdots,3) \tag{5.1}$$

という関数関係が存在する．ここで f^μ は x^ν のおのおのについて連続であるばかりでなく，さらに必要な階数まで微分可能とする．さらに4個の量 X^μ が4次元座標として役立つためには，4個の関数 f^μ は x の関数として互いに独立でなければならない．したがってPの近傍のすべての点で Jacobi の行列式が

$$\frac{\partial(X)}{\partial(x)} \overset{d}{\equiv} \frac{\partial(X^0,\ \cdots,\ X^3)}{\partial(x^0,\ \cdots,\ x^3)} \overset{d}{\equiv} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f^0}{\partial x^0} & \dfrac{\partial f^0}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^0}{\partial x^2} & \dfrac{\partial f^0}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial f^1}{\partial x^0} & \cdots & & \\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial f^3}{\partial x^0} & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \neq 0$$

であると仮定する．

さて X-系を基準にとれば，Pの近傍は Minkowski 空間となる．したがって近傍内の任意の2点A, Bの間の Lorentz 不変な距離 Δs の2乗は

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu}(X_B{}^\mu - X_A{}^\mu)(X_B{}^\nu - X_A{}^\nu) = \eta_{\mu\nu}\,\Delta X^\mu \Delta X^\nu \tag{5.2}$$

で与えられる．ここで $\eta_{\mu\nu}$ はつぎのように定義する：

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & : \ \mu=\nu=1,2,3 \\ 0 & : \ \mu\neq\nu \\ -1 & : \ \mu=\nu=0. \end{cases}$$

また点 A, B はともに P の近傍にあり，これらの座標値の差 $\Delta X^\mu \overset{d}{\equiv} (X_B{}^\mu - X_A{}^\mu)$ は十分に小さいとする．

(5.2) が 2 点 A, B の間の不変距離の定義である．これを一般座標系，つまり x–系の量でかき表わしてみよう．それには (5.1) から導かれる

$$\Delta X^\mu = f^\mu(x_B) - f^\mu(x_A) = \frac{\partial f^\mu(x)}{\partial x^\nu}\Delta x^\nu \tag{5.3}$$

という関係を利用すればよい．ただし $\Delta x^\nu \overset{d}{\equiv} x_B{}^\nu - x_A{}^\nu$ である．また特殊相対論における と同様に，ひとつの項の中の上，下 2 か所に同じ添字がでてきたときは，それについて 0 から 3 まで和をとるものと約束する．なおこの約束は以後も一貫して使用する．

(5.3) を (5.2) に代入すると Δs^2 は

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= g_{\alpha\beta}(x)\Delta x^\alpha \Delta x^\beta, \\ g_{\alpha\beta}(x) &\overset{d}{\equiv} \eta_{\mu\nu}\frac{\partial f^\mu(x)}{\partial x^\alpha}\frac{\partial f^\nu(x)}{\partial x^\beta} = g_{\beta\alpha}(x) \end{aligned} \tag{5.4}$$

となる．もし重力場が存在する領域 Ω の中のすべての点における $g_{\alpha\beta}(x)$ が，あらかじめわかっていたならば，Ω 内にある互いに隣接した 2 点の間の不変距離を求めるには，(5.2) よりも (5.4) の方が便利である．わざわざ局所 Lorentz 系を設置するという手間がはぶけるからである．

Ω 内の任意の点 P における $g_{\alpha\beta}(P)$ を知るには以下のような手順をふめばよい．いま P の近所に 10 個の独立な点を勝手にきめる．その第 k 番目の点と P との座標差を $\Delta x^\mu(k) \overset{d}{\equiv} x^\mu(k) - x^\mu(P)$ とする．また定義 (5.2) によって両者のあいだの Δs を実測して，$\Delta s(k)$ という値を得たとする．そこで (5.4) から

$$\Delta s(k)^2 = g_{\alpha\beta}(P)\Delta x^\alpha(k)\Delta x^\beta(k) \qquad (k = 1, 2, \cdots, 10)$$

という 10 個の連立方程式を得る．ここで 10 個の量 $g_{\alpha\beta}(P)$ が未知数である．Δs や Δx は既知量であるから，これを解けば，$g_{\alpha\beta}(P)$ が求まる．この操作を Ω 内のすべての点で実行すれば，領域 Ω の内部の $g_{\alpha\beta}$ はすべて与えられたことになる．その結果，Ω 内ではいたる所で，隣接した 2 点の間の距離が (5.4)

によって容易に求まる．このような場合，Ωは距離の定義された空間，あるいは**計量空間**とか**距離空間**とよばれる．また$g_{\alpha\beta}(x)$を**計量テンソル**という．

さて，(5.4) からわかるように，$g_{\alpha\beta}$はxの関数である．それは$f^{\mu}(x)$によってきまる．ところで$f^{\mu}(x)$は，世界点xの近傍で，その点における重力の作用するままに自由落下する箱の中に設けた Lorentz 系Xと，x-系との関係を示す量である．したがって$f^{\mu}(x)$が，xに応じてどのように変化するかは重力場の分布状態に依存する．そこで結局$g_{\alpha\beta}(x)$は重力場の分布状態に密接に関係していることが理解できよう．それゆえ$g_{\alpha\beta}(x)$はまた**Einstein の重力ポテンシャル**と呼ばれる．この名前の当否は，後に質点の運動方程式をしらべることにより，明らかにされるであろう．ともかく，Newton の重力論では重力ポテンシャルは1個の量$\phi(x)$で表わされた．しかし Einstein の理論では10個の成分をもつ$g_{\alpha\beta}$がそれにかわって登場する．この事情は電磁ポテンシャルの場合とよく似ている．はじめ静電場だけを問題にしていたときはスカラー・ポテンシャルでこと足りた．後に電磁場を一括して考察する段階となって，そのほかに3個の成分が必要となり，合計4個の成分をもつ4元ベクトル・ポテンシャルが Coulomb の静電ポテンシャルにとってかわった．このいきさつと同様に Einstein の理論は Newton の理論をさらに精密に，またその適用性をさらに拡大した理論であるといえよう．実際この予想どうりであることが以後，順を追って説明されるであろう．

ともかく，計量テンソルとよばれる幾何学量$g_{\alpha\beta}$が物理的には重力のポテンシャルの役目をはたしているということは，§3に述べたように，まさに幾何学と物理学の融合の具体例といえよう．

さてこれからわれわれの考察の対象となるものはさきに述べた時空領域Ωの中における物理法則であり，またΩの中にどのような$g_{\alpha\beta}(x)$が分布しているかという問題である．数学ではΩのように距離 (5.4) の定義された空間を**Riemann 空間**とよぶ．そのような空間の特性を究明する数学が**Riemann 幾何学**である．空間の特性はすべてΩ内で与えられた$g_{\alpha\beta}$だけによって規定さ

れる．それゆえ $g_{\alpha\beta}$ は Riemann 空間の最も基本的な量である．したがってこれは基本テンソルとも呼ばれる．空間の幾何学的特性は本来，そこに採用された座標系の選び方には無関係なはずである．したがって Riemann 幾何学ではすべての幾何学的関係を座標系の選び方に依存しない形式に表わすことが工夫されている．これが Riemann 空間における **テンソル解析** である．

われわれのなすべきことは Ω とよばれる Riemann 空間内における物理法則を一般相対性原理の要請に従って，座標系のとり方に関係しない形式にかき表わすという仕事である．したがって，上述のテンソル解析が既に数学者の手により用意されているということは実に好運である．すなわち，すべての物理法則をこのテンソル解析の用語を用いてかき表わせばよい．またテンソル形式でかき表わすことのできない物理量が仮に存在したとすれば，そのような量が顔を出す物理法則は，任意の座標変換に対してその表現形式をかえないというわけにはいかないことになる．これは一般相対性原理の要請をやぶることを意味する．したがってそのような不都合な量が存在してはならないということが，一般相対性原理の主張である．このように考えると，物理法則を一般相対性原理に従うように表現するには，テンソル解析さえマスターしておけばそれで十分であるということになる．こうなると，読者は嫌でもしばらく次章のテンソル解析を読まねばなるまい．

第2章 テンソル解析

§6. 4次元連続体

これから扱う対象は時空（あるいは世界）とよばれる4次元連続体とその中で定義された種々の量である．いま時空のある部分域 Ω に属するすべての点に座標 $x^\mu(\mu=0,1,2,3)$ が与えられたとする．Ω をおおうこの座標系を簡単のために x-系と呼ぶことにする．また Ω 内の互いに隣接した任意の2点の座標を x^μ，および $x^\mu+dx^\mu$（場合によっては肩の添字も省略して，単に座標 x，および $x+dx$ とかくこともある）とするとき，これらの間の不変距離 ds は

$$ds^2=g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \tag{6.1}$$

により与えられる．ここで Ω 内の各点における $g_{\mu\nu}(x)$ の値は与えられているものとする．したがって公式（6.1）により Ω 内のどの場所でも距離が定義されていることになる．このような連続体が4次元 **Riemann 空間** とよばれることは§5で既に述べた．

いま x-系の代りに，新しい座標系 x' を考える．Ω 内の任意の点の新旧の座標を x' および x とするとき，これらの座標値のあいだには

$$x^{\mu'}=f^\mu(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3) \qquad (\mu=0,\cdots,3), \tag{6.2}$$

あるいは簡単に

$$x^{\mu'}=f^\mu(x) \qquad (\mu=0,\cdots,3)$$

という関係が与えられているとする．ここで $f^\mu(x)$は $x^0,\cdots,x^3$ のすべてについて2階まで連続微分可能な関数ならば何でもよい．ただし，4個の変数 $x^{\mu'}$ が座標として役立つためには，4個の x の関数 f^μ は関数的に独立である必要がある．したがって f^μ から作られる Jacobi の行列式は Ω のどの点でも

$$\frac{\partial(x')}{\partial(x)}\overset{d}{\equiv}\frac{\partial(x^{0'},\ x^{1'},\ x^{2'},\ x^{3'})}{\partial(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)}\neq 0 \tag{6.3}$$

という条件を満足している必要がある．この結果（6.2）を $x^0,\cdots,x^3$ につい

て逆に解いて

$$x^{\mu} = h^{\mu}(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) \stackrel{d}{\equiv} h^{\mu}(x') \qquad (6.2)'$$

とかき表わすこともできる.

さて,(6.2) により定義された一般座標変換

$$x^{\mu} \to x^{\mu'} \qquad (6.4)$$

に対して,距離 ds の値が不変であることは,§5に与えた ds の定義から明らかである.いま x'-系を基準にしたときの計量テンソル*を $g_{\mu\nu}'(x')$ とかけば,ds^2 の値が不変ということは

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^{\mu}dx^{\nu} = g_{\mu\nu}'(x')dx^{\mu'}dx^{\nu'} \qquad (6.5)$$

という形にかき表わされる.ここで dx' は x'-系からみたときの2点の座標差を示す.dx' と dx の関係は (6.2) によりつぎのようになる:

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial f^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}dx^{\alpha} \stackrel{d}{\equiv} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}}dx^{\alpha}. \qquad (6.6)$$

これを (6.5) に代入すると添字を少しかきかえて

$$g_{\alpha\beta}(x)dx^{\alpha}dx^{\beta} = g_{\mu\nu}'(x')\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\beta}}dx^{\alpha}dx^{\beta}.$$

dx が全く任意にとりうる量であるにもかかわらず,上の等式が成立するためには

$$g_{\alpha\beta}(x) = g_{\mu\nu}'(x')\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\beta}}$$

という関係が成立していなければならない.あるいは恒等式

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\rho'}} = \delta^{\mu}{}_{\rho} = \begin{cases} 1 & \mu = \rho \\ 0 & \mu \neq \rho \end{cases}$$

を使うと

$$g_{\mu\nu}'(x') = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}}g_{\alpha\beta}(x). \qquad (6.7)$$

これが $g_{\mu\nu}'$ と $g_{\mu\nu}$ の間の関係である.実はこの関係のために,$g_{\mu\nu}$ を計量テンソルと呼ぶ.これについては後で再び述べる.

---

* ここではまだテンソルという言葉の定義が与えてない.したがってこれは係数 $g_{\mu\nu}$ の単なる呼び名と考えてもらいたい.

普通 Riemann 空間というときは 4 × 4 行列 $g_{\mu\nu}$ が正定符号の場合を指す．すなわちどんな dx^μ に対しても $ds^2>0$ の場合にこの空間を Riemann 空間という．しかし時空では $ds^2>0$ の場合だけでなく，$\leqq 0$ の場合もある．そこでこの事情に関連して以後若干注意すべきことがうまれる．たとえば

$$g \overset{d}{\equiv} \det(g_{\mu\nu}) = \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & \cdots\cdots & & \\ \vdots & \cdots\cdots & & \\ g_{30} & \cdots\cdots & & g_{33} \end{vmatrix}$$

とおくとき，Ω 内のすべての点で $g(x)<0$ である．

［証 明］ (5.4) により

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu}.$$

いま 4 × 4 行列 $\boldsymbol{X}$ の (β, ν) 要素を

$$(\boldsymbol{X})_{\beta\nu} \overset{d}{\equiv} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu}$$

により定義する．これの転位行列 $\boldsymbol{X}^T$ については

$$(\boldsymbol{X}^T)_{\mu\alpha} \overset{d}{\equiv} (\boldsymbol{X})_{\alpha\mu} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}.$$

さらに 4 × 4 行列 $\boldsymbol{Y}$ の (α, β) 要素を

$$(\boldsymbol{Y})_{\alpha\beta} \overset{d}{\equiv} \eta_{\alpha\beta}$$

により定義すれば，

$$\begin{aligned} g &= \det(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}) = \det(\boldsymbol{X}^T)\det(\boldsymbol{Y})\det(\boldsymbol{X}) \\ &= -\{\det(\boldsymbol{X})\}^2 \end{aligned} \tag{6.8}$$

となる．ところで，§5 から $\det(\boldsymbol{X}) \neq 0$ であるから，$g<0$ となる．

なお $g_{\mu\nu}'$ と $g_{\mu\nu}$ の関係 (6.7) を使い，さらに一般座標変換 (6.4) に対する条件 (6.3) を考慮すれば，$g' \overset{d}{\equiv} \det(g_{\mu\nu}')<0$ も容易に証明できる．なお g' と g の間の関係は§9 の終りに与えられている．

§7. スカラー，ベクトル，テンソル

これから Riemann 空間内で種々の量を定義しよう．これらはのちに時空内

に分布している物理量を表わすのに利用される．

(a) スカラー

まず最も簡単な量はスカラーである．いま x–系を基準にとったとき，ある量の値が S，また x'–系を基準にした場合の値を S' とする．もし

$$S = S'$$

ならば，この量を**スカラー**と呼ぶ．

Riemann 空間内の各点においてある量の値がそれぞれ与えられているとする．x–系において点 x におけるその値を $S(x)$，これを x'–系からみたとき，同じ点（その座標を x' とする）における値を $S'(x')$ とする．もし x が Ω の中のどの点であっても，常に

$$S(x) = S'(x') \qquad (x \text{ と } x' \text{ とは同じ点}) \tag{7.1}$$

が成立するとき，$S(x)$ を**スカラー場**という．

$S'(x')$の関数の形を知りたければ，つぎのようにすればよい．(6.2)$'$ により x は x' の関数であるから，これをもとの $S(x)$ に代入する：

$$S\{x^0, \cdots, x^3\} = S\{h^0(x'), \cdots, h^3(x')\} = S'(x^{0'}, \cdots, x^{3'}).$$

(b) ベクトル

x–系を基準にしたとき，Ω 内のある点 P（その座標を x とする）に 4 個の数 $A^0, A^1, \cdots, A^3$ が与えられているとする．これを x'–系からみたとき，その値は $A^{0'}, A^{1'}, \cdots, A^{3'}$ であるとする．もし A^μ と $A^{\mu'}$ のあいだに

$$A^{\mu'} = \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu}\right)_P A^\nu \tag{7.2}$$

という関係が存在するとき，4 個の数をひとまとめにして，点 P における**ベクトル**（正確には**反変ベクトル**）といい，A^μ をその**成分**という．

次に，Ω 内のすべての点にそれぞれ 4 個の数が与えられており，x–系からみたときの点 x におけるこれらの数を $A^\mu(x)$ ($\mu = 0, 1, \cdots, 3$) とする．それを x'–系からみたとき $A^{\mu'}(x')$ とし，両者のあいだに

$$A^{\mu'}(x') = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} A^\nu(x) \qquad (x \text{ と } x' \text{ は同一点}) \tag{7.2$'$}$$

という関係が，すべての点で成立するときは， 4個の成分 $A^\mu(x)$ を一括して**ベクトル場**（正確には**反変ベクトル場**）といい， 4個の $A^\mu(x)$ のそれぞれをその成分という.

例1. Ω 内で互いに隣接した2点の x-系での座標をそれぞれ x^μ, $x^\mu+dx^\mu$ とすれば，dx^μ は反変ベクトル場の成分である．なぜなら，dx' と dx を結ぶ関係式

$$dx^{\mu'}=\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu}dx^\nu$$

はまさに (7.2)′ にほかならない.*

例2. ベクトルのようにみえるが，(7.2) の規則に従わない悪い例をあげよう．いま Ω 内にスカラー場 $S(x)$ が与えられているとする． 4個の量 $S_\mu \overset{d}{\equiv} \partial S(x)/\partial x^\mu$ の変換則を考えてみよう．x'-系における量 S_μ' は

$$S_\mu'(x')\overset{d}{\equiv}\frac{\partial S'(x')}{\partial x^{\mu'}}=\frac{\partial S(x)}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu(x')}{\partial x^{\mu'}}$$

$$=\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}}S_\nu \tag{7.3}$$

という関係を満足する．これは (7.2) とは別のものであるから，S_μ は反変ベクトル場ではない.

そこでこれから Ω 内の各点に4個の数がそれぞれ与えられているとし， x-系からみたとき， 点 x におけるその値を $B_\mu(x)$， これを x'-系からみたとき $B_\mu'(x')$ とする．両者のあいだに (7.3) と同様な関係，すなわち

$$B_\mu'(x')=\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}}B_\nu(x) \tag{7.4}$$

が成立するとき，$B_\mu(x)$ を**共変ベクトル場**（の成分）とよぶ．これに対して変換則 (7.2)′ に従うものを， 既に注意したように**反変ベクトル場**という．いままで黙って使っていたが，反変ベクトルは添字を右肩に，共変ベクトルは右下につけて，両者を区別する． なお上の例2に挙げた S_μ は共変ベクトル場の一例である.

* dx^μ は反変ベクトルであるが，x^μ はベクトルではない．なぜならその変換則は (6.2) である．これは，ベクトルの変換則とは全く異なる.

共変ベクトルにしても反変ベクトルにしても，その変換則には $\partial x/\partial x'$ あるいは $\partial x'/\partial x$ という係数がでてくる．これらは一般座標変換では点 x の関数である．したがって点の位置を指定しなければ，ベクトルの変換則は意味のないものとなる．それゆえベクトルを定義するときは必ずどの点におけるベクトルであるかを明示しなければならない．位置の指定が不必要となるのは，変換が

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} = a^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu, \tag{7.5}$$

$$a,\ b = x \text{ に無関係な任意の定数}$$

という場合にかぎられる．(7.5) のタイプの変換で，4×4 行列 $a^\mu{}_\nu$ が逆をもつ場合，これを**アフィン変換**という．アフィン変換に対してのみ，A^μ が変換則 (7.2) に従うとき，A^μ を**アフィン反変ベクトル**という．**アフィン共変ベクトル**も同様に定義できる．アフィン・ベクトルに対してはベクトルの定義に点の位置を指定する必要はない．

(c)　テンソル

ここでは簡単のために3階テンソルを例にとってその定義を説明する．x-系からみたとき，ある1点 x において 4^3 個の数 $T^\lambda{}_{\mu\nu}$ ($\lambda,\ \mu,\ \nu$ はいずれも独立に 0, 1, 2, 3 のいずれかの値をとる) がある．これを x'-系からみたとき $T^\lambda{}_{\mu\nu}{}'$ とする．両者のあいだに

$$T^\lambda{}_{\mu\nu}{}' = \frac{\partial x^{\lambda\prime}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\mu\prime}}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\nu\prime}}T^\alpha{}_{\beta\gamma} \tag{7.6}$$

という関係があるとき，4^3 個の T をひとまとめにして，点 x における**テンソル**という．特にこの例では上，下に添字が合計3個ついているので，これを**3階混合テンソル**とよぶ．もし添字が上だけならば**反変テンソル**，下だけならば**共変テンソル**と呼ぶ．また，添字の数をテンソルの**階数**という．

Ω 内の各点に 4^2 個の数が与えられており，x-系からみたとき，Ω 内の任意の点 x におけるこれらの数を $T_{\mu\nu}(x)$，x'-系では $T_{\mu\nu}{}'(x')$ とする．もし

$$T_{\mu\nu}{}'(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu\prime}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu\prime}}T_{\alpha\beta}(x) \tag{7.7}$$

がすべての点で成立すれば，$T_{\mu\nu}(x)$ を**2階共変テンソル場***という．**反変テンソル場**や，もっと高階のテンソル場の定義も，それがどのようなものか容易に想像がつくであろう．

例1． $g_{\mu\nu}$ と $g_{\mu\nu}'$ との関係 (6.7) を定義 (7.7) と比べると，$g_{\mu\nu}(x)$ が2階共変テンソル場であることがわかる．このために $g_{\mu\nu}$ のことを“**計量テンソル**”と名づけた．

例2． Kronecker の記号

$$\delta^{\mu}{}_{\nu}=\begin{cases}1 & \mu=\nu\\ 0 & \mu\neq\nu\end{cases}$$

を2階混合テンソル場の x-系における成分であるとしよう．このように定義すれば，x'-系ではテンソル場の定義から

$$\delta^{\mu}{}_{\nu}{}'(x')=\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}}\delta^{\alpha}{}_{\beta}=\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\nu'}}.$$

この右辺は $\delta^{\mu}{}_{\nu}$ に等しい．つまり

$$\delta^{\mu}{}_{\nu}{}'(x')=\delta^{\mu}{}_{\nu}$$

となる．したがってこの混合テンソル場はその成分が x に無関係であるばかりでなく，一般座標変換をしても，その成分の値が不変という特徴をもっている．したがって今後は Kronecker の $\delta^{\mu}{}_{\nu}$ を常に混合テンソルとして使用することにする．

例1にでた $g_{\mu\nu}(x)$ は，添字の位置をいれかえても

$$g_{\mu\nu}(x)=g_{\nu\mu}(x)$$

という性質がある．このようなテンソルを**対称テンソル**という．一般に n 階テンソル $T_{ab\cdots n}$ があるとき，この n 個の添字の順序をどのように置き換えても，成分の値が不変のとき，このテンソルを**完全対称テンソル**という．

これと同様に2階テンソル $f_{\mu\nu}$ が

$$f_{\mu\nu}=-f_{\nu\mu}$$

のとき，これを**反対称テンソル**という．また $A_{\lambda\mu\nu}$ の添字の順序の置換を

* 厳密にいうなら，おのおのの $T_{\mu\nu}$ は“テンソル場の成分”というべきである．しかし今後は面倒だから $T_{\mu\nu}(x)$ を単にテンソルと呼ぶことにする．

行うとき，偶置換ならもとの値に等しく，奇置換ならもとと逆符号の値になるとき，$A_{\lambda\mu\nu}$ を**完全反対称共変テンソル**という．完全反対称テンソルのときは，添字の中に同じものがでてくれば，その成分の値が0になることはすぐにわかる．それゆえ，4次元 Riemann 空間では4階よりも高い階数の完全反対称テンソルはありえない．

いままではもっぱら共変テンソルに対してだけ添字の対称性について説明した．しかし同じことは上つきの添字についても同様に成り立つ．ここで重要なことは，添字の対称性が一般座標変換に対して不変であるということである．すなわち $g_{\mu\nu}$ が x-系で，μ, ν のいれかえに対して値が不変ならば，同じ性質は x'-系でも存続する．しかしこれは上つき添字同士のいれかえ，あるいは下つき添字同士の順序の置換についてのみいえることである．上下の添字のいれかえについてはこの種の議論をすることは無意味である．たとえば x-系を基準にしたときテンソル $T^{\mu}{}_{\nu}$ が上下の添字のいれかえに対して対称，つまり $T^{\mu}{}_{\nu}=T^{\nu}{}_{\mu}$ とする．しかし x'-系では容易にわかるように $T^{\mu}{}_{\nu}{}' \neq T^{\nu}{}_{\mu}{}'$ となる．つまり x-系における等式は偶然 x-系でのみ成立した関係であり，座標系をかえれば，あとかたもなく消えてしまう関係である．このような性質は Riemann 幾何学や，一般相対論では無意味なものである．座標変換しても常に存続する関係式だけが不変な意義をもつものである．

例3． x-系を基準にとり Ω 内の各点で 4×4 行列 $g_{\mu\nu}(x)$ の逆行列を定義しよう．この行列成分を $g^{\mu\nu}(x)$ とかけば，逆行列であるという条件は

$$\delta^{\mu}{}_{\nu}=g^{\mu\lambda}(x)g_{\lambda\nu}(x). \tag{7.8}$$

さて $g_{\lambda\nu}$ が対称行列ということから $g^{\mu\lambda}=g^{\lambda\mu}$ となる．同様に x'-系で $g_{\mu\nu}{}'$ の逆行列を定義する：

$$\delta^{\mu}{}_{\nu}=g^{\mu\lambda\prime}(x')g_{\lambda\nu}{}'(x').$$

$g_{\mu\nu}$ が共変テンソルであるという事実と上のふたつの関係から $g^{\mu\nu}(x)$ が反変2階テンソルであることがわかる（証明は読者にまかせる）．

以上の定義から，一階の共変（あるいは反変）テンソルが，共変（あるいは反変）ベクトルであり，スカラーとは0階のテンソルであることがわかる．ま

たテンソルの定義に際しても，ベクトルと同様にそれの定義されている点を指定しなければ意味がないということも自明であろう．これに対する唯一の例外はアフィン・テンソルである．それはアフィン変換に対してのみテンソルの変換則に従う量のことである．

§8. テンソル代数

説明を容易にするために特別なタイプのテンソルを例にとって説明する．しかし以下に述べることは他の型の，また任意の階数のテンソルについても成立することが容易に想像できよう．なおこれから述べることについては，一，二の例外を除いて，証明は一切省略する．またしばしば，テンソル場を単にテンソルと略称する．

(a) テンソルの等式

2つのテンソル場 $A^\lambda{}_{\mu\nu}(x)$，$B^\lambda{}_{\mu\nu}(x)$ が与えられている．もしそれらの成分について

$$A^\lambda{}_{\mu\nu}(x) = B^\lambda{}_{\mu\nu}(x) \tag{8.1}$$

という等式が Ω 内のすべての点 x で，またすべての添字の組 (λ, μ, ν) に対して成立するとき，テンソル場 $A(x)$ と $B(x)$ とは**等しい**という．ここで注意すべきことは，等式の両辺には，同じ階数，同じタイプのテンソルの，同じ点 x における，同じ添字の組をもつ成分が顔を出すということである．つぎの例は無意味な等式の例である．いま x と y は異なる点とするとき

$$A^\lambda{}_{\mu\nu}(x) = B^\lambda{}_{\mu\nu}(y), \qquad A^\lambda{}_{\mu\nu}(x) = B_\lambda{}^{\mu\nu}(x).$$

これらは全くナンセンスである．なぜならば，これらは一般座標変換を行えばたちまち崩れてしまう関係式であるからである．

一般相対論では物理法則は必ず(8.1)のような2つのテンソル量の間の等式という形で表わされる．この形式こそ，まさに一般相対性原理の要請にかなったものといえる．なぜならば，この原理に従っていることが一目瞭然であるからである．これは特に重要な点であるから以下に理由を述べる．

(8.1)がある座標系 x において成立しているとする．いま一般座標変換 $x \to$

x' を考えよう．A はテンソルであるから，この変換に応じてつぎのように変わる：

$$A^{\lambda}{}_{\mu\nu} \to A^{\lambda}{}_{\mu\nu}{}'(x') = \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{l}} \frac{\partial x^{m}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{n}}{\partial x^{\nu'}} A^{l}{}_{mn}(x).$$

(8.1) を使ってかきかえると

$$= \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{l}} \frac{\partial x^{m}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{n}}{\partial x^{\nu'}} B^{l}{}_{mn}(x).$$

仮定により B はテンソルであるから上の量は $B^{\lambda}{}_{\mu\nu}{}'(x')$ に等しい．すなわち

$$A^{\lambda}{}_{\mu\nu}{}'(x') = B^{\lambda}{}_{\mu\nu}{}'(x').$$

つまり x'–系でも (8.1) と全く同じ形の等式が成立する．すなわち一般相対性原理の要請が見事に満たされている．なおこのような性質を等式 (8.1) は一般座標変換に対して共変であるという．ただし A も B もスカラーのときは，変換に対して不変であるという．この例のように，A, B がテンソルであるということさえわかっていれば，もはや等式 (8.1) が一般相対性原理を満足しているか否かについて心配する必要はない．これがテンソルの便利な点である．

(b) テンソルの和と差

$A^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x)$, $B^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x)$ がともに，その添字の示すような同種のテンソル場の成分とすれば，同じ添字の組をもつ成分の和（または差）

$$C^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x) \overset{d}{\equiv} A^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x) \pm B^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x)$$

はまた A, B と同種のテンソル場の成分である（証明は読者にまかす）．

もっと一般には，$c_1(x)$, $c_2(x)$ をいずれもスカラー場とすれば

$$c_1(x)A^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x) + c_2(x)B^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x)$$

も，A, B と同じ型のテンソル場の成分である．

さて，(8.1) の右辺の量を左に移して

$$A^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x) - B^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x) = 0 \qquad (8.1)'$$

とかくとき，上の定理からこの左辺は A, B と同じ型のテンソル場の成分である．いま (8.1)′ の左辺を仮に $C^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x)$ とかくことにすれば，テンソル C はその成分がすべて 0 となる．一般に何階のテンソルであろうとも，その成分がす

べて0となるテンソルを**0テンソル**と呼び，これを単に0とかく．したがって2つのテンソル A と B が等しいということは，その差 C が0テンソルであるということと同じである．なお，ある座標系で，成分がすべて0となったときは，他のいかなる座標系でも，その成分はすべて0となる．いいかえれば，テンソルが0ということは一般座標変換に対して不変な性質である．それゆえ，一般相対性原理を満たしていることが一目瞭然となるように物理法則をかき下すのには，(8.1) の代りに (8.1)′ のようにかいてもよい．

(c) テンソルの積

2つのテンソル $A^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x)$，$B^{\rho\sigma}(x)$ が与えられているとする．この両者からそれぞれ任意に成分をとりだして，それらの積

$$C^{\lambda}{}_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}(x) \overset{d}{\equiv} A^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x)B^{\rho\sigma}(x) \tag{8.2}$$

を作る．このようにして生じた 4^5 個の量 $C(x)$ は，その添字の示すタイプの5階混合テンソルの成分である（証明は省く）．テンソル C をもとの A, B の積，あるいは**テンソル積**という．特に A, B がいずれも1階のテンソル，つまりベクトルのときは，C を A, B の**ベクトル積**という．

ベクトル積やテンソル積をくり返せば，いくらでも高階のテンソルを作ることができる．たとえば A^{μ}, B_{ν}, C_{λ}, D^{ρ} をすべてベクトルとすれば，

$$T^{\mu}{}_{\nu\lambda}{}^{\rho} \overset{d}{\equiv} A^{\mu}B_{\nu}C_{\lambda}D^{\rho} \tag{8.3}$$

によって定義された T は A, B, C, D のテンソル積であり，それは4階混合テンソルである．しかし，逆に，任意の4階テンソルを4個のベクトルのテンソル積として (8.3) のように表わすわけにはいかない．これについてはつぎの定理がある．

定理 1.　任意の n 階の反変テンソル $T^{\mu\nu\cdots\rho\sigma}$ は n 個の反変ベクトル A^{μ}, B^{ν}, $\cdots$, M^{ρ}, N^{σ} のテンソル積の和として

$$T^{\mu\nu\cdots\rho\sigma} = \sum_{k=1}^{m} A^{\mu}{}_{(k)}B^{\nu}{}_{(k)}\cdots M^{\rho}{}_{(k)}N^{\sigma}{}_{(k)} \tag{8.4}$$

のように表わすことができる．ただし項の数 m は 4^{n-1} 個必要である．

［証 明］　はじめに(8.4)の記号の説明をしておこう．ベクトル $A^{\mu}{}_{(k)}B^{\nu}{}_{(k)}\cdots$

の右肩の $\mu, \nu, \cdots$ はベクトルの成分を示す．また右下の (k) は第 k 番目の項に登場するベクトルであることを示す記号である．

さて，(8.4) を数学的帰納法で証明しよう．まず $n=1$ のときはベクトル $A^{\mu}{}_{(1)}$ として，T^{μ} 自身をとればよい：

$$T^{\mu} = A^{\mu}{}_{(1)}.$$

つぎに $n-1$ 階の任意のテンソルを考えよう．それについては定理が成立すると仮定する．さて，これからひとつの座標系（これを x–系とよぶ）をきめ，これを基準にしたときのテンソル成分について考える．いま 4 個の $n-1$ 階のテンソル $S^{\mu\nu\cdots\rho(i)}$ $(i=0, 1, 2, 3)$ があるとする．(i) はテンソル成分を示す添字ではない．x–系を基準にしたとき，その成分は，問題に与えられているテンソル T とつぎのような関係にあるとする：

$$S^{\mu\nu\cdots\rho(i)} = T^{\mu\nu\cdots\rho i} \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{8.5}$$

ここで 4 個の反変ベクトル $N^{\sigma}{}_{(i)}$ $(i=0, 1, 2, 3)$ の x–系を基準にしたときの成分を

$$N^{\sigma}{}_{(i)} = \delta^{\sigma}{}_{i} \tag{8.6}$$

によって定義する．

(8.5), (8.6) を組合せると，x–系では

$$T^{\mu\nu\cdots\rho\sigma} = \sum_{i=0}^{3} S^{\mu\nu\cdots\rho(i)} N^{\sigma}{}_{(i)} \tag{8.7}$$

という関係が成立する．この関係は x–系だけで成立している．しかし右辺の各項は $(n-1)$ 階のテンソルとベクトルのテンソル積であるから，n 階のテンソルである．そのような項の和もまたテンソルであるから，(8.7) はテンソルの等式である．したがってこれはいかなる座標系でも成立する．ただし他の座標系では (8.5), (8.6) という特別な関係はもはや成立しないが，それはどうでもよい．

さて，(8.7) の各項にでてきた S は $n-1$ 階のテンソルであるから，それは仮定により $n-1$ 個のベクトルのテンソル積の和で表わされる．しかもその項の数は，いずれも $4^{(n-1)-1} = 4^{n-2}$ 個である．このように S を表わせば，(8.7)

の右辺は，n 個のベクトルのベクトル積の和になる．また項の総数も $4^{n-2} \times 4 = 4^{n-1}$ となる．

ここでひとつ検討すべき点が残っている．上の証明では4個の特別なベクトル $N^{\sigma}{}_{(i)}$ と，特別な $n-1$ 階のテンソル S を使ったために（8.7）が成立した．しかし適当な3個のベクトル $V^{\sigma}{}_{(k)}$ $(k=1, 2, 3)$ と，もっと具合のよい3個のテンソル U を使って

$$T^{\mu\nu\cdots\rho\sigma} = \sum_{k=1}^{3} U^{\mu\nu\cdots\rho(k)} V^{\sigma}{}_{(k)} \tag{8.8}$$

という形に表わすことができたとすれば，（8.4）の項の総数 m を 4^{n-1} より小さくできるかもしれないという希望である．

いま面倒だから（8.8）の両辺の添字のうち $\mu\nu\cdots\rho$ は省略して

$$T^{\sigma} = \sum_{k=1}^{3} U^{(k)} V^{\sigma}{}_{(k)} \qquad (\sigma = 0, 1, 2, 3)$$

とかくことにする．この4個の式において，T^{σ} は与えられた量である．いま3個の量 $U^{(k)}$ $(k=1, 2, 3)$ を未知数と考える．また矩形行列 $V^{\sigma}{}_{(k)}$ も適当に与えられてあるものとする．そこで3個の未知数 $U^{(k)}$ に対する4個の方程式が互いに矛盾しないためには，省略した添字（$\mu\nu\cdots\rho$）のすべての選び方に対してそれぞれ

$$\begin{vmatrix} T^0 & V^0{}_{(1)} & V^0{}_{(2)} & V^0{}_{(3)} \\ T^1 & V^1{}_{(1)} & & \vdots \\ T^2 & V^2{}_{(1)} & \vdots & \\ T^3 & V^3{}_{(1)} & & V^3{}_{(3)} \end{vmatrix} = 0 \tag{8.9}$$

でなければならない．これは $T^0, \cdots, T^3$ の間に線形関係が存在することを示す．本来，T は全く任意の n 階テンソルであるから，上の行列式を0にすることは不可能である．したがって一般には（8.8）のような分解はできない．つまり（8.7）のように，少くとも4個のベクトル $N_{(i)}$ $(i=0, 1, 2, 3)$ が必ず必要である．ただ特別な場合，たとえば（8.9）を満足させるような T に対しては 4^{n-1} 個より少い項の和として表わすこともできるが，それは例外である．

上の定理は反変テンソルに関するものであった．しかし共変テンソル，あるいは混合テンソルについても同じような定理の成り立つことが容易にわかるであろう．

ここでは3階混合テンソル $T^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ のテンソル積による分解を具体的にかいてみよう．いま x-系を基準にしたとき，ベクトル A^{λ}, B_{μ} をつぎのように定義する：

$$\left.\begin{aligned} A^{\lambda}{}_{(ij)} &\overset{d}{\equiv} T^{\lambda}{}_{ij}, \\ B^{(i)}{}_{\mu} &\overset{d}{\equiv} \delta^{i}{}_{\mu}. \end{aligned}\right. \qquad (i,\ j=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

これを使うと T は $4^{(3-1)}=16$ 個の項の和に分解される：

$$T^{\lambda}{}_{\mu\nu}=\sum_{i,\,j=0}^{3} A^{\lambda}{}_{(ij)}B^{(i)}{}_{\mu}B^{(j)}{}_{\nu}.$$

(d) 縮　約

テンソル $A^{\lambda\mu}{}_{\nu\rho\sigma}$ の上つき添字のひとつ，たとえば μ と，下つき添字のひとつ，たとえば ν を等しくとって，その添字について0から3までの和をとることを**縮約**という．いま

$$B^{\lambda}{}_{\rho\sigma}\overset{d}{\equiv} A^{\lambda\mu}{}_{\mu\rho\sigma}\ \left(=\sum_{\mu=0}^{3} A^{\lambda\mu}{}_{\mu\rho\sigma}\right)$$

とかくとき，縮約の結果できた B はその添字の示すタイプの3階テンソルの成分であることが証明できる．

縮約の仕方にはまだいろいろある．たとえば

$$C^{\mu}{}_{\nu\rho}\overset{d}{\equiv} A^{\lambda\mu}{}_{\nu\rho\lambda}$$

とおくとき，この C ももちろんテンソルである．しかし一般には $B^{\lambda}{}_{\rho\sigma}\neq C^{\lambda}{}_{\rho\sigma}$ である．B をさらに縮約すると

$$D_{\rho}\overset{d}{\equiv} B^{\lambda}{}_{\rho\lambda}, \qquad E_{\sigma}\overset{d}{\equiv} B^{\lambda}{}_{\lambda\sigma}$$

のように，種々の共変ベクトルができる．

上の定義からわかるように，縮約すると，もとのテンソルよりも上，下1個ずつ添字の少ないテンソルができる．ここで注意すべきことは，上同士，ある

いは下の添字同士を等しくおいて，それについて和をとっても，その結果はテンソルとはならない．たとえば

$$F^{\lambda\mu}{}_{\sigma} \overset{d}{\equiv} \sum_{\nu=0}^{3} A^{\lambda\mu}{}_{\nu\nu\sigma} \qquad \text{（正しくない例）}$$

とおいても，この F はテンソルではない．

（e）**内　積**

テンソル積と縮約を同時に行う操作を内積という．いま $A^{\lambda\mu}$, $B_{\rho\sigma\nu}$ のテンソル積を作り，この λ と ρ について縮約したものを

$$C^{\mu}{}_{\sigma\nu} \overset{d}{\equiv} A^{\lambda\mu}B_{\lambda\sigma\nu} \tag{8.10}$$

とおく．C は添字の示すタイプのテンソルである．特にベクトル A^{λ} と，B_{μ} について同様の操作をほどこすと

$$S \overset{d}{\equiv} A^{\mu}B_{\mu}$$

というスカラーができる．S をベクトル A, B の**内積**とか**スカラー積**という．また (8.10) をテンソル A, B の内積という．縮約の仕方に応じて内積のとりかたにはいろいろある．

ここで特に重要なのは任意のテンソルと計量テンソル $g_{\mu\nu}$, あるいはその逆の反変テンソル $g^{\mu\nu}$ との内積である．いま A^{μ} は反変ベクトルとする．これに対して

$$B_{\nu} \overset{d}{\equiv} g_{\mu\nu}A^{\mu}$$

とおけば，B_{ν} は共変ベクトルとなる（証明は読者にまかす）．またこの B_{ν} に $g^{\mu\nu}$ を掛けると，(7.8) を使って

$$g^{\mu\nu}B_{\nu} = g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda}A^{\lambda} = \delta^{\mu}{}_{\lambda}A^{\lambda} = A^{\mu}.$$

このように $g^{\mu\nu}$, あるいは $g_{\mu\nu}$ を使うとテンソルの添字を自由に上下できる．そこで今後は A^{μ} から上の手続きにより導かれた B_{ν} をもとのベクトルと別のものとは考えず，同じ A を用いて A_{ν} とかくことにする．すなわち

$$A_{\nu} \overset{d}{\equiv} g_{\nu\mu}A^{\mu}, \qquad \text{したがって} \qquad A^{\mu} = g^{\mu\nu}A_{\nu}$$

となる．このようにひとつのベクトル A を反変形式 A^{μ} で表わすか，共変形

式 A_μ で表現するかは，本質的にはどちらでもよいことで，それは単に便宜上の問題である．なおここではベクトルについてのみ述べたが，たとえばテンソル $T^{\mu\nu}$ についても同様のことがいえる．すなわち $T^{\mu\nu}$, $T^{\mu}{}_{\nu}$, $T_{\mu}{}^{\nu}$, $T_{\mu\nu}$ の4通りの表現法がある．このどれを採用するかは，もっぱら便宜上の問題である．ここでちょっと添字の位置について注意しておくことがある．

いま $T^{\mu\nu}$ は任意の2階テンソルとし，その添字には特別な対称性はないものとする．$g_{\mu\nu}$ を使って添字の1個を下に移すと

$$T_{\mu}{}^{\nu} \overset{d}{\equiv} g_{\mu\lambda}T^{\lambda\nu}, \qquad \text{あるいは} \qquad T^{\nu}{}_{\mu} \overset{d}{\equiv} T^{\nu\lambda}g_{\lambda\mu}$$

の2種類が生じる．一般に上，下の添字はその変換性が全く違うから，$T^{\nu}{}_{\mu}$ とかこうが，$T_{\mu}{}^{\nu}$ とかこうがどちらでもよいように思える．しかしいまの例では

$$T_{\mu}{}^{\nu} \overset{d}{\equiv} g_{\mu\lambda}T^{\lambda\nu} \neq g_{\mu\lambda}T^{\nu\lambda} \overset{d}{\equiv} T^{\nu}{}_{\mu}.$$

したがって，たとえ上下の添字でも，下つき添字 μ が，下に移される前は，どこにあったかを明確にするために，その位置に気をつけねばならない．しかしもし $T^{\mu\nu}$ が対称テンソルならば，$T_{\mu}{}^{\nu} = T^{\nu}{}_{\mu}$ である．

最後にベクトル A^μ の大きさについて述べよう．

$$\|A\| \overset{d}{\equiv} \sqrt{|g_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu}|} = \sqrt{|A_{\mu}A^{\mu}|} = \sqrt{|g^{\mu\nu}A_{\mu}A_{\nu}|}$$

を**ベクトル A の大きさ**という．

普通の Riemann 空間では上の定義の $\sqrt{\ }$ の中は常に正であるが，現実の時空では先にも注意したように正，負ならびに0の3つの場合がある．ともかく $g_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu}$ はスカラーであるから，このベクトルの定義されている点Pの近傍で局所 Lorentz 系を設ければ，その値がどのようになるかが明確になる．局所 Lorentz 系を使えば，点Pの近傍は Minkowski 空間となるから，特殊相対論で用いた定義を使うことができる．そこで A を以下のように分類できる：

$$A_{\mu}A^{\mu}\begin{cases} >0 & : \quad \text{空間的ベクトル} \\ =0 & : \quad \text{ヌル・ベクトル} \\ <0 & : \quad \text{時間的ベクトル.} \end{cases}$$

いま任意の点P（その座標を x）とその近傍の任意の点Q（その座標を $x+$

dx）を考える．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$（その成分は dx^μ）に対して上述の分類を適用しよう．まず

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0 \tag{8.11}$$

としよう．Pを固定したとき，(8.11) を満たすようなすべてのQはPを頂点とする小さな円錐を作る．これをPにおける光円錐と呼ぶ．Pの局所 Lorentz 系を設ければ，この円錐の未来圏と過去圏も特殊相対論と同様に定義できる．

dx^μ が時間的ベクトルならば，点Qは上述の光円錐の未来（または過去）圏の中にある．これに対してもし空間的ベクトルならば，Qは円錐の外部にある．

最後に，大変役に立つ定理をひとつ述べる．

定理2． 5個の添字をもった量 $X^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu\lambda}$ がある．いま，点 x における2個の任意の共変ベクトル ξ_α, η_β, および3個の任意の反変ベクトル u^μ, v^ν, w^λ を用いて

$$S \overset{d}{\equiv} X^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu\lambda}\xi_\alpha\eta_\beta u^\mu v^\nu w^\lambda$$

という量を作ったとき，任意の座標変換に対して，S の値が不変であることがわかっているとすれば，X は実は，x における，その添字の示すような5階混合テンソルである．

上と同様のことは他のタイプのテンソルについても成立することはもちろんである．これは X がテンソルであるか否かを判定するのに役立つ．

§9. 計量テンソルの2, 3の特別な性質

先にも述べたように，一般相対論で扱う時空とよばれる4次元連続体は，普通の Riemann 空間と異なり，

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

が正，負および0の値をとりうる．これに関連して生じる2, 3の注意をまず述べよう．

いま時空のなかのある部分域 Ω を x-系でおおったとし，この中ではどこに

おいても x^0 は時間的座標を，また x^1, x^2, x^3 は空間的座標を表わすものと約束する．いま Ω 内の任意の点 x において各座標軸に接する 4 個の無限小ベクトル

$$\begin{cases} \delta_0 x^\mu \overset{d}{\equiv} (dx^0 \neq 0, \quad dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0) \\ \delta_1 x^\mu \overset{d}{\equiv} (dx^1 \neq 0, \quad dx^0 = dx^2 = dx^3 = 0) \\ \delta_2 x^\mu \overset{d}{\equiv} (dx^2 \neq 0, \quad dx^0 = dx^1 = dx^3 = 0) \\ \delta_3 x^\mu \overset{d}{\equiv} (dx^3 \neq 0, \quad dx^0 = dx^1 = dx^2 = 0) \end{cases} \tag{9.1}$$

を考えよう．

上述の約束により $\delta_0 x^\mu$ は時間的ベクトルであるから

$$g_{\mu\nu}\delta_0 x^\mu \delta_0 x^\nu = g_{00}(dx^0)^2 < 0,$$

すなわち Ω の中のすべての点で

$$g_{00}(x) < 0 \tag{9.2}$$

でなければならない．これに反して（9.1）のほかのベクトルはいずれも空間的であるから

$$g_{kk}(x) > 0 \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{9.3}$$

さらに（9.1）の 3 個の空間的ベクトルの張る 3 次元ベクトル空間に属する任意のベクトル，たとえば

$$\delta_1 x^\mu + \delta_2 x^\mu + \delta_3 x^\mu = \begin{cases} 0 & : \mu = 0 \\ dx^\mu & : \mu = 1, 2, 3 \end{cases}$$

が空間的であるためには，任意の dx^k $(k = 1, 2, 3)$ に対して常に

$$\sum_{k, l=1}^{3} g_{kl} dx^k dx^l > 0$$

でなければならない．この判別式からつぎのことが導かれる $(i, k = 1, 2, 3)$：

$$\begin{vmatrix} g_{ii} & g_{ik} \\ g_{ki} & g_{kk} \end{vmatrix} > 0, \qquad \text{および} \qquad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0 \tag{9.4}$$

という条件が Ω のいたるところで成立しなければならない．ついでに $g_{\mu\nu}$ の満

たすべき条件をもうひとつ追加する．それは既に§6の最後に述べたこと，すなわち

$$g(x)=\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & \cdots & g_{03} \\ g_{10} & \cdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{30} & \cdots & & g_{33} \end{vmatrix}<0 \tag{9.5}$$

である．

座標変換をしても常に添字0をもつ座標が時間的座標で他は空間的であるならば，計量テンソルに対する (9.2)～(9.5) という性質はいかなる座標系でも温存される．

つぎに後の便宜のために $g_{\mu\nu}$ に関する性質を2，3ならべる．

いま行列式 g の，要素 $g_{\mu\nu}$ に対する余行列式を $\tilde{g}^{\mu\nu}$ とすれば

$$\tilde{g}^{\mu\nu}=gg^{\mu\nu} \tag{9.6}$$

である．なぜなら $g^{\mu\nu}$ の定義 (7.8) から，余行列式の満たすべき関係式

$$\tilde{g}^{\mu\nu}g_{\nu\lambda}=gg^{\mu\nu}g_{\nu\lambda}=g\delta^{\mu}{}_{\lambda}$$

が導かれるからである．(9.6) を使うと $g(x)$ を x^μ で微分することは容易にできる：

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x^\mu}=\sum_{\alpha,\,\beta}\tilde{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}=g\,g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}, \tag{9.7}$$

あるいは $g<0$ を考慮して，

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\log\{-g(x)\}=g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \tag{9.7$'$}$$

とかくこともできる．

いま Ω 内の $g_{\mu\nu}$ の値をすべて無限小だけ変えて，点 x における新しい値を $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$ とする．いま同じ点 x における新，旧の値の無限小の差を

$$\delta g_{\mu\nu}(x)\overset{d}{\equiv}\bar{g}_{\mu\nu}(x)-g_{\mu\nu}(x) \tag{9.8}$$

とする．$\bar{g}_{\mu\nu}$ も $g_{\mu\nu}$ と同様に2階共変テンソルとすれば，上の定義から $\delta g_{\mu\nu}$ も共変テンソルとなる．

$g_{\mu\nu}$ のこの変化に対応して，$g^{\mu\nu}$ も

$$g^{\mu\nu}(x) \to \bar{g}^{\mu\nu}(x) \stackrel{d}{\equiv} g^{\mu\nu}(x) + \delta g^{\mu\nu}(x)$$

に変わったとする．$\bar{g}^{\mu\nu}$ は $\bar{g}_{\mu\nu}$ の逆行列であるから，もちろん

$$\bar{g}^{\mu\nu}\bar{g}_{\nu\lambda} = \delta^{\mu}{}_{\lambda}$$

が成立する．これをもとの $g^{\mu\nu}$, $g_{\nu\lambda}$ を使ってかくと（7.8）を利用して，δ の1次までの近似で

$$\delta g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda} + g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\lambda} = 0,$$

あるいは両辺に $g^{\rho\lambda}$ を掛け，少し添字のかきかえをすると

$$\delta g^{\mu\nu} = -\, g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta}\,. \tag{9.9}$$

ここで注意すべきことは，反変テンソル $\delta g^{\mu\nu}$ は共変テンソル $\delta g_{\alpha\beta}$ に $g^{\mu\alpha}$，$g^{\nu\beta}$ を掛けて添字を上に移したものと符号が逆であるということである．(9.9) の左辺をかきかえると

$$\delta(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g_{\alpha\beta}) \stackrel{d}{\equiv} \delta g^{\mu\nu} = -\, g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta}$$

となる．すなわち変分 δ と添字の上げ下しという演算とは可換でない．

上述の $g_{\mu\nu} \to \bar{g}_{\mu\nu}$ という変化に対応して g の変化はつぎのようになる：

$$\bar{g} \stackrel{d}{\equiv} g + \delta g = g + \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} = g + \tilde{g}^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\,,$$

すなわち

$$\delta g = g g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\,. \tag{9.10}$$

最後に一般座標変換に対する g の変換則について述べよう．いま 4×4 行列 Δ の (ν, β) 要素を

$$(\Delta)_{\nu\beta} \stackrel{d}{\equiv} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\beta\prime}} \tag{9.11}$$

によって定義する．行列 Δ の行列式は Jacobi の行例式

$$\det(\Delta) = \frac{\partial(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)}{\partial(x^{0\prime},\ x^{1\prime},\ x^{2\prime},\ x^{3\prime})} \stackrel{d}{\equiv} \frac{\partial(x)}{\partial(x')}$$

である．これらを使うと

$$g'(x') = \det(g_{\alpha\beta}'(x')) = \det\{(\Delta^T)_{\alpha\mu}g_{\mu\nu}(x)(\Delta)_{\nu\beta}\}$$

$$= \{\det(\Delta)\}^2 \det(g_{\mu\nu}) = \left\{\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right\}^2 g(x),$$

すなわち

$$\sqrt{-g'(x')} = \frac{\partial(x)}{\partial(x')}\sqrt{-g(x)}. \tag{9.12}$$

§10. テンソル密度，反対称テンソル，デュアル・テンソル

一般座標変換では，テンソルの変換則にはその係数に $\partial x'/\partial x$ や $\partial x/\partial x'$ が顔を出し，これらは x の関数であるから，たとえ同一のテンソルの，同じ添字をもつ成分でも，異なる2点におけるそれらの和や差には，座標変換に対して不変な意味がない．

たとえばベクトル $A^\mu(x)$ の，あるきまった4次元領域 ω （Ω のなかの部分域）での積分

$$\int_\omega A^\mu(x) d^4x$$

はベクトルではない．しかし，スカラー場のときは例外で，たとえ異なった2点における量でも，その和（または差）は一般座標変換に対してもスカラーである．

そこでこれから或る量 $\boldsymbol{S}(x)$ の ω 内における積分

$$I \stackrel{d}{\equiv} \int_\omega \boldsymbol{S}(x) d^4x \tag{10.1}$$

が一般座標変換に対して不変，つまりスカラーとなるのは，$\boldsymbol{S}(x)$ がどのような量の場合に限られるかを考えてみよう．

いま一般座標変換 $x \to x'$ に対して，$\boldsymbol{S}(x)$ は $\boldsymbol{S}'(x')$ に変換されるとする．そこで x'-系において，同じ領域 ω のなかで $\boldsymbol{S}'(x')$ を積分した値を I' とするとき，積分がスカラーであるためには

$$I' \stackrel{d}{\equiv} \int_\omega \boldsymbol{S}'(x') d^4x' = \int_\omega \boldsymbol{S}'(x') \frac{\partial(x')}{\partial(x)} d^4x = I$$

となる必要がある．あるいは

$$\int_\omega \left\{ \boldsymbol{S}'(x') \frac{\partial(x')}{\partial(x)} - \boldsymbol{S}(x) \right\} d^4x \equiv 0$$

が，任意の領域 ω に対して成立する必要がある．$\equiv 0$ としたのは，Ω の中で，積分域 ω をどこに，またどのような広さにとろうとも，それに関係なく，恒等的に 0 になることを示すためである．そのためには Ω のいたるところで，被積分関数が

$$\boldsymbol{S}'(x') \frac{\partial(x')}{\partial(x)} - \boldsymbol{S}(x) \equiv 0 \tag{10.2}$$

を満足しなければならない．これはかきかえると

$$\boldsymbol{S}'(x') \equiv \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \boldsymbol{S}(x). \tag{10.2$'$}$$

つまり $\boldsymbol{S}(x)$ が (10.2)′ という変換則に従うならば，(10.1) で与えられた積分 I はスカラーとなる．

一般に (10.2)′ という変換則に従う量を点 x における **スカラー密度** という.* これにならって，たとえば

$$\boldsymbol{T}^{\lambda}{}_{\mu\nu}{}'(x') = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \cdot \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\nu'}} \boldsymbol{T}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}(x) \tag{10.3}$$

という変換則に従う量を 3 階混合 **テンソル密度** と呼ぶことにする．これと，(7.6) を比べると，テンソル密度の変換則を求めるには，それと同じ添字をもつテンソルの変換則にさらに Jacobi の行列式 $\partial(x)/\partial(x')$ を掛ければよいことがわかる．すでにスカラー密度 $\boldsymbol{S}(x)$ や，上にあげた例で採用しているように，今後，密度量，つまりスカラー密度，ベクトル密度やテンソル密度を表わすのには必ず太字を用いて，普通のスカラー，ベクトルやテンソルと区別することにする．

ここで誤解をさけるために蛇足かもしれないが，一言，注意をしておく．すなわちスカラー密度の積分はスカラーであるが，テンソル密度の積分には不変な意味はない．たとえば $\boldsymbol{A}^{\mu}(x)$ を反変ベクトル密度とするとき

---

* スカラー密度の定義には，点 x を指定する必要がある．これはスカラーの定義と異なる点である．

$$\int_\omega \boldsymbol{A}^\mu(x)d^4x$$

はもちろんベクトルではない．

ここでついでに密度量の定義を少し拡張しておこう．いま $\boldsymbol{T}^{\mu\nu}(x)$ が，一般座標変換に対して，$\boldsymbol{T}^{\mu\nu\prime}(x')$ に変換されたとする．もし $\boldsymbol{T}$ と $\boldsymbol{T}'$ の間に

$$\boldsymbol{T}^{\mu\nu\prime}(x') = \left\{\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right\}^n \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\nu\prime}}{\partial x^\beta} \boldsymbol{T}^{\alpha\beta}(x) \tag{10.4}$$

という関係があるとき，$\boldsymbol{T}^{\mu\nu}$ を**ウエイトが $\boldsymbol{n}$ の密度量**という．正確にはウエイトが n の2階反変テンソル密度という．n は0, ±1, ±2, ⋯ という値をとる．特に $n=0$ は普通のテンソルであり，$n=+1$ が普通の意味の（つまり，最初に述べた定義に従う）テンソル密度である．

スカラー密度の例をあげよう．(9.12) から明らかなように $\sqrt{-g(x)}$ はウエイトが1のスカラー密度である．一般に任意の2階共変テンソルをマトリックスとみなし，その行列式の平方根をとれば，それはウエイトが1のスカラー密度となる．このなかで特に相対論において重要な役を荷うものが上にあげた $\sqrt{-g}$ である．

いま任意のスカラー密度 $\boldsymbol{S}(x)$ を例にとろう．これの変換則 (10.2) において，x'-系として特に点 x における局所 Lorentz 系 X（これを X-系とよぼう）を採ったとしよう．また X-系における $\boldsymbol{S}$ を特に，

$$\boldsymbol{S}'(x') \quad \text{の代りに} \quad \bar{\boldsymbol{S}}(X)$$

とかくことにすると，(10.2) はつぎのようになる：

$$\boldsymbol{S}(x) = \frac{\partial(X)}{\partial(x)} \bar{\boldsymbol{S}}(X). \tag{10.5}$$

ところで (6.8) によれば

$$\det(\boldsymbol{X}) \overset{d}{\equiv} \frac{\partial(X)}{\partial(x)} = \sqrt{-g(x)} \tag{6.8}$$

である．そこで

$$\boldsymbol{S}(x) = \sqrt{-g(x)}\ \bar{\boldsymbol{S}}(X), \tag{10.6}$$

あるいは

$$\bar{\boldsymbol{S}}(X) = \frac{\boldsymbol{S}(x)}{\sqrt{-g(x)}}. \tag{10.6$'$}$$

この左辺は X 系を基準にした量であり，x–系とは無関係である．したがって右辺は，一見 x–系に依存した量のようにみえるがそうでない．つまり，この右辺の量はどのような座標系を基準にとろうが，その値は一定で，常に左辺の値に等しい．つまり

$$\bar{\boldsymbol{S}}(X) = \frac{\boldsymbol{S}(x)}{\sqrt{-g(x)}} = \frac{\boldsymbol{S}'(x')}{\sqrt{-g'(x')}}. \tag{10.6$''$}$$

(10.6)$''$ は $\boldsymbol{S}(x)/\sqrt{-g(x)}$ がスカラーであることを示す．そこで

$$S(x) \overset{d}{\equiv} \frac{\boldsymbol{S}(x)}{\sqrt{-g(x)}} = \bar{\boldsymbol{S}}(X) \tag{10.7}$$

とおけば $S(x)$ は普通のスカラーであり，これを使うとスカラー密度は

$$\boldsymbol{S}(x) = \sqrt{-g(x)}\ S(x) \tag{10.7$'$}$$

となる．このように密度量には $\sqrt{-g}$ がしばしばついてまわる．

全く同様の考察により，たとえばテンソル密度（ウエイトは1とする）$\boldsymbol{T}^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ については

$$\boldsymbol{T}^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x) = \sqrt{-g(x)}\ T^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x) \tag{10.8}$$

とかくことができる．$T^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x)$ は普通の3階混合テンソルである．

点 x における局所 Lorentz 系（X–系）を用いたときの4次元体積要素は

$$d^4X \overset{d}{\equiv} dX^0 dX^1 dX^2 dX^3$$

である．これを一般座標系（x–系）からみれば

$$d^4X = \frac{\partial(X)}{\partial(x)} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{-g(x)}\ d^4x \tag{10.9}$$

となる．この左辺は x–系に無関係な量であるから，x–系の代りに x'–系を用いても

$$\sqrt{-g(x)}\ d^4x = d^4X = \sqrt{-g'(x')}\ d^4x' \tag{10.10}$$

という等式が成り立つ．この式から $\sqrt{-g}\ d^4x$ がスカラーであることがわかる．したがって (10.7) と組合せると

$$\boldsymbol{S}(x) d^4x = S(x)\sqrt{-g(x)}\ d^4x = \text{スカラー} \tag{10.11}$$

となる．それゆえこのような量の和（積分）もスカラーとなる．

反対称2階共変テンソル $f_{\mu\nu}(x)$ の行列式は

$$\det(f_{\mu\nu}) = (f_{01}f_{23} + f_{02}f_{31} + f_{03}f_{12})^2$$

となる．したがって

$$\sqrt{\det(f_{\mu\nu})} = f_{01}f_{23} + f_{02}f_{31} + f_{03}f_{12} \tag{10.12}$$

となる．これは $\sqrt{-g}$ とは関係のないスカラー密度の例である．

もうひとつスカラー密度の例をあげておこう．いま $S_{\mu\nu\rho\sigma}$ は完全反対称4階共変テンソルとする．いま4個の添字について完全反対称である記号を以下のように定義する：

$$\epsilon_{[\mu\nu\rho\sigma]} = \begin{cases} 1 & : [\mu\nu\rho\sigma] \to [0\ 1\ 2\ 3] \text{ が偶置換} \\ -1 & : [\mu\nu\rho\sigma] \to [0\ 1\ 2\ 3] \text{ が奇置換} \\ 0 & : \text{その他の場合.} \end{cases} \tag{10.13}$$

これは単なる記号であり，共変テンソルではない．この約束を明らかにするために添字を［ ］で囲んでおいた．この記号を使うと x-系では

$$S_{\mu\nu\rho\sigma}(x) = S_{0123}(x)\epsilon_{[\mu\nu\rho\sigma]} \tag{10.14}$$

とかくことができる．

つぎに x'-系における成分 $S_{\mu\nu\rho\sigma}'(x')$ について考えてみよう．テンソルの変換則から

$$S_{0123}'(x') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{0'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{3'}} S_{\mu\nu\rho\sigma}(x).$$

これに（10.14）を代入すると

$$\begin{aligned} S_{0123}'(x') &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{0'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{3'}} \epsilon_{[\mu\nu\rho\sigma]} S_{0123}(x) \\ &= \frac{\partial(x)}{\partial(x')} S_{0123}(x). \end{aligned}$$

いま $S_{0123}(x)$ を $\boldsymbol{S}(x)$ とかけば，この式は

$$\boldsymbol{S}'(x') = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \boldsymbol{S}(x) \tag{10.15}$$

となる．これは $\boldsymbol{S}(x)$ が点 x におけるスカラー密度であることを示す．以上

をまとめると，完全反対称の4階共変テンソルの0でない成分はスカラー密度と同じ変換則に従うということがわかる.

つぎに完全反対称4階反変テンソル密度 $\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}$ をつぎのように定義しよう. x-系を基準にとったとき

$$\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}=\begin{cases} 1 & : \quad \text{置換}\ (\mu\nu\rho\sigma)\to(0\ 1\ 2\ 3)\ \text{が偶置換のとき} \\ -1 & : \quad (\mu\nu\rho\sigma)\to(0\ 1\ 2\ 3)\ \text{が奇置換のとき} \\ 0 & : \quad \text{同じ添字が少くとも2個あるとき} \end{cases}$$

(10.16)

とする. 他の任意の座標系（x'-系）における成分はテンソル密度（ウエイト1）の定義により

$$\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma\prime}=\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^a}\frac{\partial x^{\nu\prime}}{\partial x^b}\frac{\partial x^{\rho\prime}}{\partial x^c}\frac{\partial x^{\sigma\prime}}{\partial x^d}\boldsymbol{E}^{abcd}$$

$$=\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\frac{\partial(x')}{\partial(x)}=\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}$$

となる. すなわちいかなる系でも（10.16）と同じ定義が成り立つ. つまりこれは Kronecker の記号と同様に，成分の値が座標系のとり方に無関係な珍しい例である.

いま $\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}$ を用いて反対称共変テンソル $f_{\mu\nu}$ から

$$^*\boldsymbol{f}^{\mu\nu}\overset{d}{\equiv}\frac{1}{2!}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}f_{\rho\sigma} \tag{10.17}$$

という反対称2階反変テンソル密度を作ることができる.

この成分はつぎのようになる：

$$\begin{aligned} &^*\boldsymbol{f}^{01}=f_{23}, \qquad &^*\boldsymbol{f}^{02}=f_{31}, \qquad &^*\boldsymbol{f}^{03}=f_{12}, \\ &^*\boldsymbol{f}^{23}=f_{01}, \qquad &^*\boldsymbol{f}^{31}=f_{02}, \qquad &^*\boldsymbol{f}^{12}=f_{03}. \end{aligned} \tag{10.18}$$

これを使うと（10.12）は

$$\sqrt{\det(f_{\mu\nu})}=\frac{1}{2}{}^*\boldsymbol{f}^{\mu\nu}f_{\mu\nu}=\frac{1}{2\cdot 2}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}f_{\rho\sigma}f_{\mu\nu} \tag{10.12$'$}$$

となる. これをみれば，$\sqrt{\det(f_{\mu\nu})}$ がスカラー密度であることは一目瞭然であろう.

(10.17) と同様に，共変ベクトル A_σ，完全反対称の3階，および4階の共変テンソル

$$T_{\nu\rho\sigma}\,, \qquad S_{\mu\nu\rho\sigma}$$

から，それぞれ完全反対称の3階反変テンソル密度，ならびに反変ベクトル密度，およびスカラー密度を導くことができる：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{\mu\nu\rho} &\overset{d}{\equiv} \boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}A_\sigma\,, \qquad & {}^*\boldsymbol{f}^{\mu\nu} &\overset{d}{\equiv} \frac{1}{2!}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}f_{\rho\sigma}\,, \\ \boldsymbol{T}^{\mu} &\overset{d}{\equiv} \frac{1}{3!}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}T_{\nu\rho\sigma}\,, \qquad & \boldsymbol{S} &\overset{d}{\equiv} \frac{1}{4!}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}S_{\mu\nu\rho\sigma}\,. \end{aligned} \tag{10.19}$$

ここでは全部の場合を一覧表の形にまとめるために，(10.17) の定義も，もう一度ならべた．2階反変テンソル密度のときだけ左肩に * をつけたのは，

$$\boldsymbol{f}^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \sqrt{-g}\,g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}f_{\rho\sigma}$$

という反変テンソル密度と混同しないためである．そこで両者を区別して，${}^*\boldsymbol{f}^{\mu\nu}$ を $f_{\mu\nu}$ に**デュアルなテンソル密度**とよび

$${}^*f^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \frac{{}^*\boldsymbol{f}^{\mu\nu}}{\sqrt{-g}} \tag{10.20}$$

を $f_{\mu\nu}$ の**デュアル・テンソル**という．また A_σ にデュアルなテンソル密度は $\boldsymbol{A}^{\mu\nu\rho}$，$T_{\nu\rho\sigma}$ にデュアルなベクトル密度は $\boldsymbol{T}^{\mu}$，$S_{\mu\nu\rho\sigma}$ にデュアルなスカラー密度は $\boldsymbol{S}$ である．特に $\boldsymbol{S}$ は (10.19) の最後の定義式から

$$\boldsymbol{S} = S_{0123} \tag{10.21}$$

である．これをみれば完全反対称4階共変テンソルの0でない成分がスカラー密度と同じ変換性をもつことは一目瞭然であろう．

ここで (10.16) によく似たつぎの量を考えてみよう．いま4個の添字について完全反対称な共変テンソル密度（広義）を

$$\boldsymbol{E}^{-1}{}_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 &: \quad (\mu\nu\rho\sigma)\to(0\ 1\ 2\ 3)\ \text{が偶置換のとき} \\ -1 &: \quad (\mu\nu\rho\sigma)\to(0\ 1\ 2\ 3)\ \text{が奇置換のとき} \\ 0 &: \quad \text{その他} \end{cases} \tag{10.22}$$

とおく．この定義がいかなる座標系でも成り立つためには，この密度量としてのウエイトがいくらであればよいかを調べてみよう．

いまウエイトが n の密度量とすれば，x'－系での成分は

$$\boldsymbol{E}^{-1}{}_{\mu\nu\rho\sigma}{}' \overset{d}{\equiv} \left\{\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right\}^n \frac{\partial x^a}{\partial x^{\mu\prime}} \frac{\partial x^b}{\partial x^{\nu\prime}} \frac{\partial x^c}{\partial x^{\rho\prime}} \frac{\partial x^d}{\partial x^{\sigma\prime}} \boldsymbol{E}^{-1}{}_{abcd}\,.$$

右辺の最初の因子を除いた残りは

$$\frac{\partial x^a}{\partial x^{\mu\prime}} \cdots \boldsymbol{E}^{-1}{}_{abcd} = \begin{cases} +\dfrac{\partial(x)}{\partial(x')} & : \quad (\mu\nu\rho\sigma) \to (0\ 1\ 2\ 3) \text{ が偶置換} \\ -\dfrac{\partial(x)}{\partial(x')} & : \quad (\mu\nu\rho\sigma) \to (0\ 1\ 2\ 3) \text{ が奇置換} \\ 0 & : \quad \text{その他.} \end{cases}$$

したがって

$$\boldsymbol{E}^{-1}{}_{\mu\nu\rho\sigma}{}' = \left\{\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right\}^{n+1} \boldsymbol{E}^{-1}{}_{\mu\nu\rho\sigma}$$

となる．それゆえ，成分の値が座標変換に対して不変となるためには $n=-1$ とおく必要がある． $\boldsymbol{E}$ の右肩に -1 をつけたのは，実はこのことを明示するためである．

なお上の結果を一般化するとつぎのことがわかる．いま $\boldsymbol{W}^{-1}{}_{\mu\nu\rho\sigma}(x)$ をウエイトが -1 の完全反対称共変テンソル密度とすれば，その 0 でない成分はスカラーの変換性をもつ．

さて，上の $\boldsymbol{E}^{-1}$ の定義と（10.13）により定義された記号を比べると，$\epsilon_{[\mu\nu\rho\sigma]}$ は実は $\boldsymbol{E}^{-1}{}_{\mu\nu\rho\sigma}$ にほかならないことがわかる．また S_{0123} は（10.21）に示したようにスカラー密度 $\boldsymbol{S}(x)$ であるから，（10.14）を

$$S_{\mu\nu\rho\sigma}(x) = \boldsymbol{S}(x)\boldsymbol{E}^{-1}{}_{\mu\nu\rho\sigma} \tag{10.14$'$}$$

とかくこともできる． 右辺の密度量としてのウエイトは， $\boldsymbol{S}$ が $+1$， $\boldsymbol{E}^{-1}$ が -1 であるから相殺して 0 となる．したがって右辺は添字の示すとおりの普通のテンソルである．これは正に左辺の変換性に等しい．

今後は（10.22）に与えられた特別なテンソル密度 $\boldsymbol{E}^{-1}{}_{\mu\nu\rho\sigma}$ を除いては，密度のウエイトが 1 以外の量は扱わないことにする．したがってこれからは太字の量はすべて密度のウエイトが 1 の量を示す．また密度のウエイトが 0，つまり普通のテンソルは，約束により細字で表わす．

ここで， テンソル密度 $\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}$ と， ある意味でそれの逆に相当する $\boldsymbol{E}^{-1}{}_{\mu\nu\rho\sigma}$ の

関係をつぎに表の形にまとめておく.

$$E^{\mu\nu\rho\sigma}E^{-1}{}_{\alpha\beta\gamma\sigma}=\sum_{P}\varepsilon_P P\{\delta^{\mu}{}_{\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta}\delta^{\rho}{}_{\gamma}\}. \tag{10.23}$$

ここで P は (α,β,γ) の置換を示す. P が偶置換なら $\varepsilon_P=+1$, 奇置換なら $\varepsilon_P=-1$ とする. $\sum$ はすべての置換について和をとることを示す.

$$E^{\mu\nu\rho\sigma}E^{-1}{}_{\alpha\beta\rho\sigma}=2!(\delta^{\mu}{}_{\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta}-\delta^{\mu}{}_{\beta}\delta^{\nu}{}_{\alpha}), \tag{10.24}$$

$$E^{\mu\nu\rho\sigma}E^{-1}{}_{\alpha\nu\rho\sigma}=3!\,\delta^{\mu}{}_{\alpha}, \tag{10.25}$$

$$E^{\mu\nu\rho\sigma}E^{-1}{}_{\mu\nu\rho\sigma}=4!. \tag{10.26}$$

§ 11. 積 分, Stokes の 定 理, Gauss の 定 理

積分量でスカラーとなるものとしては, スカラー密度 $S(x)$ の 4 次元領域 ω にわたる積分

$$\int_{\omega}S(x)d^4x \tag{11.1}$$

がある. 本節ではこれ以外の例について述べる.

まず Ω 内の任意の点 x を起点として 4 個の互いに独立な無限小変位ベクトル

$$d_0x^{\mu},\qquad d_1x^{\mu},\qquad d_2x^{\mu},\qquad d_3x^{\mu}, \tag{11.2}$$

を考えよう. これらは互いに独立であるから, どれかひとつは時間的ベクトルである. これらのベクトルにより張られる 2 次元面積要素 $d\sigma^{\mu\nu}$, 3 次元体積要素 $dv^{\lambda\mu\nu}$, および 4 次元体積要素 $d\omega^{\mu\nu\rho\sigma}$ はつぎのように定義される:

$$d\sigma^{\mu\nu}(x)\overset{d}{\equiv}\begin{vmatrix} d_ix^{\mu} & d_ix^{\nu} \\ d_kx^{\mu} & d_kx^{\nu}\end{vmatrix},$$

$$dv^{\lambda\mu\nu}(x)\overset{d}{\equiv}\begin{vmatrix} d_ix^{\lambda} & d_ix^{\mu} & d_ix^{\nu} \\ d_jx^{\lambda} & d_jx^{\mu} & d_jx^{\nu} \\ d_kx^{\lambda} & d_kx^{\mu} & d_kx^{\nu}\end{vmatrix}, \tag{11.3}$$

$$d\omega^{\mu\nu\rho\sigma}(x)\overset{d}{\equiv}\begin{vmatrix} d_0x^{\mu} & d_0x^{\nu} & d_0x^{\rho} & d_0x^{\sigma} \\ d_1x^{\mu} & d_1x^{\nu} & \cdots & \cdots \\ d_2x^{\mu} & d_2x^{\nu} & \cdots & \\ d_3x^{\mu} & \cdots & & d_3x^{\sigma}\end{vmatrix}.$$

i, j, k は 0, 1, 2, 3 の中のいずれでもよい．ただし $i \neq j \neq k$ とする．その選び方に応じて種々の $d\sigma$, dv が定義される．これらはいずれも完全反対称反変テンソルである．

ここで任意の共変ベクトル場を $A_\mu(x)$，また完全反対称な 2, 3, 4 階共変テンソル場をそれぞれ $A_{\mu\nu}(x)$, $T_{\lambda\mu\nu}(x)$ および $S_{\mu\nu\rho\sigma}(x)$ とする．これらから作られたつぎのような積分はすべてスカラーである．

$$\left.\begin{aligned} &\int_C A_\mu(x)dx^\mu, \qquad && \frac{1}{2!}\iint_S A_{\mu\nu}(x)d\sigma^{\mu\nu}(x), \\ \frac{1}{3!}&\iiint_V T_{\lambda\mu\nu}(x)dv^{\lambda\mu\nu}(x), && \frac{1}{4!}\iiiint_\omega S_{\mu\nu\rho\sigma}(x)d\omega^{\mu\nu\rho\sigma}(x). \end{aligned}\right\} \tag{11.4}$$

ここで最後の積分は実は (11.1) と同じものである．いま積分域 ω のなかの任意の点 P において，新しい座標系（x'－系）をつぎのような具合に設ける．すなわち新しい座標軸の点 P における接線ベクトルがはじめに述べた P における 4 個の無限小変位ベクトル (11.2) と一致するように軸をきめる．このようにすれば (11.2) の成分は (9.1) のようになる．

したがって x'－系では

$$d\omega^{0123'}(P) = dx^{0'}dx^{1'}dx^{2'}dx^{3'} \overset{d}{\equiv} d^4x' \tag{11.5}$$

となる．一方，(11.4) はスカラーであるから，点 P において

$$\frac{1}{4!}S_{\mu\nu\rho\sigma}(x)d\omega^{\mu\nu\rho\sigma}(x) = \frac{1}{4!}S_{\mu\nu\rho\sigma}'(x')d\omega^{\mu\nu\rho\sigma\prime}(x')$$
$$= S_{0123}'(x')d\omega^{0123\prime}(x').$$

これに (11.5)，および (10.21) を代入すると

$$= \boldsymbol{S}'(x')d^4x' = \boldsymbol{S}(x)d^4x.$$

このような操作を ω 内のすべての点において行えば

$$\frac{1}{4!}\int_\omega S_{\mu\nu\rho\sigma}(x)d\omega^{\mu\nu\rho\sigma}(x) = \int_\omega \boldsymbol{S}(x)d^4x \tag{11.1$'$}$$

となる．

これから証明なしに Stokes，および Gauss の定理を述べよう．証明をする

にはまず積分域を多数の小さなマス目にわける．つぎに積分がスカラーであることを利用して，各マス目の中で局所 Lorentz 系を設ければ，各マス目ごとに容易に証明ができる．

Stokes の定理

(11.4) の最初の積分の積分路 C は閉曲線とする．C を縁（ふち）とする任意の2次元曲面を S とすれば，任意の共変ベクトル A_μ に対して

$$\oint_C A_\mu dx^\mu = \frac{1}{2!}\iint_S f_{\mu\nu}\, d\sigma^{\mu\nu} \tag{11.6}$$

が成立する． ここで $d\sigma^{\mu\nu}$ を張る無限小変位ベクトル d_1x^μ, d_2x^ν はともに面 S に接していることはいうまでもない．また $f_{\mu\nu}$ は

$$f_{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{11.7}$$

$$\left(\partial_\mu A_\nu \overset{d}{\equiv} \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\right)$$

である．

Gauss の定理（3次元の場合）

(11.4) の2次元積分面 S が“閉曲面”とする．この S を境界面とする任意の3次元的領域を V とする． 任意の反対称共変テンソル $A_{\mu\nu}$ についてつぎの等式が成り立つ：

$$\frac{1}{2!}\iint_S A_{\mu\nu}\, d\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{3!}\iiint_V F_{\lambda\mu\nu}\, dv^{\lambda\mu\nu}. \tag{11.8}$$

ここで $F_{\lambda\mu\nu}$ は

$$F_{\lambda\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \partial_\lambda A_{\mu\nu} + \partial_\mu A_{\nu\lambda} + \partial_\nu A_{\lambda\mu} \tag{11.9}$$

である．この F は $(\lambda\mu\nu)$ の置換に対して完全反対称である．

Gauss の定理（4次元の場合）

V を任意の3次元的閉超曲面， これによりかこまれた4次元領域を ω とする．任意の完全反対称3階共変テンソル $T_{\lambda\mu\nu}$ に対してつぎの等式が成立する：

$$\frac{1}{3!}\iiint_V T_{\lambda\mu\nu}\, dv^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{4!}\int\cdots\int_\omega W_{\mu\nu\rho\sigma}\, d\omega^{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{11.10}$$

ここで W は

$$W_{\mu\nu\rho\sigma} \overset{d}{\equiv} \partial_\mu T_{\nu\rho\sigma} - \partial_\nu T_{\rho\sigma\mu} + \partial_\rho T_{\sigma\mu\nu} - \partial_\sigma T_{\mu\nu\rho}. \qquad (11.11)$$

W も添字の置換に対して完全反対称である．

さて上の3つの関係式はそれぞれの積分域がどんな大きさであろうとも，また Ω の中のどこにあろうとも常に成り立つ．それゆえ $d\sigma^{\mu\nu}$，$dv^{\lambda\mu\nu}$，$d\omega^{\mu\nu\rho\sigma}$ は任意に選びうる．また (11.6)，(11.8)，(11.10) の左辺はスカラーである．したがって $f_{\mu\nu}$，$F_{\lambda\mu\nu}$，$W_{\mu\nu\rho\sigma}$ はそれぞれ完全反対称の 2, 3, 4 階共変テンソルである．

つぎに (11.6) の右辺の S は，与えられた閉曲線 C を境界線とすべしという制約以外は全く任意である．いま C を境界にもつ2つの2次元曲面 S, S' を考える．これに対して (11.6) から

$$\iint_S f_{\mu\nu}\, d\sigma^{\mu\nu} - \iint_{S'} f_{\mu\nu}\, d\sigma^{\mu\nu} = 0$$

となる．S と S' は C において連結されたひとつの閉曲面を形成し，両面の間には3次元空間 V がはさまれている．いま面 S' の表裏の向きを逆にすれば（つまり S' では $-d\sigma^{\mu\nu}$ を $+d\sigma^{\mu\nu}$ にかえる）上の積分は

$$\iint_{S+S'} f_{\mu\nu}\, d\sigma^{\mu\nu} = 0$$

となる．この場合，面の裏側とは V に接する側を指す．これに Gauss の定理 (11.8) を使うと

$$\frac{1}{2!}\iint_{S+S'} f_{\mu\nu}\, d\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{3!}\iiint_V (\partial_\lambda f_{\mu\nu} + \partial_\mu f_{\nu\lambda} + \partial_\nu f_{\lambda\mu})\, dv^{\lambda\mu\nu} \equiv 0.$$

ここで $\equiv 0$ とは V の形，大きさ，位置に関係なく常に0となることを示す．したがって任意のベクトル A_μ に対して

$$\partial_\lambda f_{\mu\nu} + \partial_\mu f_{\nu\lambda} + \partial_\nu f_{\lambda\mu} \equiv 0 \qquad (11.12)$$

が成立する．ただし $f_{\mu\nu}$ は

$$f_{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad (11.7)$$

である．なお (11.12) の左辺に (11.7) を代入して，直接に計算しても，それが0となることが容易にわかる．

上の議論と全く同様なことが(11.8)についても成立する．すなわち(11.8)の左辺の積分面 S をきめても右辺の V は任意にとりうる．そこで S を縁とする2つの3次元空間を V, V' とすれば，前と同様に

$$\iiint_{V+V'} F_{\lambda\mu\nu}\, dv^{\lambda\mu\nu} \equiv 0$$

となる．これに（11.10）を利用すれば（V と V' でかこまれた4次元領域を ω とする），

$$\int\cdots\int_{\omega} (\partial_\mu F_{\nu\rho\sigma} - \partial_\nu F_{\rho\sigma\mu} + \partial_\rho F_{\sigma\mu\nu} - \partial_\sigma F_{\mu\nu\rho})\, d\omega^{\mu\nu\rho\sigma} \equiv 0.$$

つまり，任意の反対称テンソル $A_{\mu\nu}$ に対して

$$\partial_\mu F_{\nu\rho\sigma} - \partial_\nu F_{\rho\sigma\mu} + \partial_\rho F_{\sigma\mu\nu} - \partial_\sigma F_{\mu\nu\rho} \equiv 0 \tag{11.13}$$

が成立する．ただし $F_{\nu\rho\sigma}$ は

$$F_{\nu\rho\sigma} \overset{d}{\equiv} \partial_\nu A_{\rho\sigma} + \partial_\rho A_{\sigma\nu} + \partial_\sigma A_{\nu\rho} \tag{11.9}$$

である．（11.13）もその左辺に（11.9）を代入して直接に証明できる．

上に述べた2つの恒等式の逆も成立する．それを定理として述べよう．

定 理 3. 反対称共変テンソル $f_{\mu\nu}$ が Ω の中のすべての点で

$$\partial_\lambda f_{\mu\nu} + \partial_\mu f_{\nu\lambda} + \partial_\nu f_{\lambda\mu} = 0$$

となるときは，$f_{\mu\nu}$ は適当なベクトル A_μ を用いてつぎの形に表わされる．

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu .$$

定 理 4. 完全反対称の3階共変テンソル $F_{\lambda\mu\nu}$ が Ω の中のすべての点で

$$\partial_\mu F_{\nu\rho\sigma} - \partial_\nu F_{\rho\sigma\mu} + \partial_\rho F_{\sigma\mu\nu} - \partial_\sigma F_{\mu\nu\rho} = 0$$

となるときは，適当な反対称テンソル $A_{\mu\nu}$ を用いて F を

$$F_{\lambda\mu\nu} = \partial_\lambda A_{\mu\nu} + \partial_\mu A_{\nu\lambda} + \partial_\nu A_{\lambda\mu}$$

の形に表わすことができる．

これらの証明は巻末の付録1にゆずる．

さて Gauss の定理（11.10）をかきかえよう．まず，この右辺は（11.1)$'$ により

$$\frac{1}{4!}\int\cdots\int_{\omega} W_{\mu\nu\rho\sigma}\, d\omega^{\mu\nu\rho\sigma} = \int\cdots\int_{\omega} W\, d^4x \tag{11.14}$$

となる．ここでスカラー密度 $\boldsymbol{W}$ は公式（10.19）により

$$\boldsymbol{W}=\frac{1}{4!}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}W_{\mu\nu\rho\sigma}=W_{0123} \tag{11.15}$$

である．ここで再び（10.19）によりベクトル密度 $\boldsymbol{T}^{\mu}$ を

$$\boldsymbol{T}^{\mu}\overset{d}{\equiv}\frac{1}{3!}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}T_{\nu\rho\sigma} \tag{11.16}$$

と定義すれば，（11.11）を（11.15）の中央の式に代入することにより

$$\boldsymbol{W}=\partial_{\mu}\boldsymbol{T}^{\mu} \tag{11.17}$$

となる．

（11.16）と公式（10.23）を使うと

$$\boldsymbol{E}^{-1}{}_{\mu\alpha\beta\gamma}\boldsymbol{T}^{\mu}=\frac{1}{3!}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\boldsymbol{E}^{-1}{}_{\mu\alpha\beta\gamma}T_{\nu\rho\sigma}=T_{\alpha\beta\gamma} \tag{11.16$'$}$$

となる．そこで（11.10）の左辺は

$$\frac{1}{3!}\iiint_{V}T_{\alpha\beta\gamma}\,dv^{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{3!}\iiint_{V}\boldsymbol{E}^{-1}{}_{\mu\nu\rho\sigma}\,\boldsymbol{T}^{\mu}\,dv^{\nu\rho\sigma}. \tag{11.18}$$

そこで結局（11.10）はつぎのようになる：

Gauss の 定 理（4 次元の場合）

任意の反変ベクトル密度 $\boldsymbol{T}^{\mu}$ に対して

$$\frac{1}{3!}\iiint_{V}\boldsymbol{E}^{-1}{}_{\mu\nu\rho\sigma}\,\boldsymbol{T}^{\mu}\,dv^{\nu\rho\sigma}=\int\cdot\cdot\int_{\omega}\partial_{\mu}\boldsymbol{T}^{\mu}\,d^{4}x \tag{11.10$'$}$$

が成り立つ．

（11.10）の右辺はまたつぎのようにかくこともできる．公式（10.14）$'$ によれば

$$W_{\mu\nu\rho\sigma}=\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}^{-1}{}_{\mu\nu\rho\sigma},$$

この $\boldsymbol{W}$ は（11.15），または（11.17）である．したがって

$$W_{\mu\nu\rho\sigma}=\partial_{\tau}\boldsymbol{T}^{\tau}\boldsymbol{E}^{-1}{}_{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{11.19}$$

そこで（11.10）$'$ の代りに

$$\frac{1}{3!}\iiint_{V}\boldsymbol{E}^{-1}{}_{\mu\nu\rho\sigma}\boldsymbol{T}^{\mu}\,dv^{\nu\rho\sigma}=\frac{1}{4!}\int\cdot\cdot\int_{\omega}\boldsymbol{E}^{-1}{}_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_{\tau}\boldsymbol{T}^{\tau}\,d\omega^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{11.10$''$}$$

とかくこともできる．

ここでついでに Stokes の定理や，3 次元の場合の Gauss の定理もデュアルなテンソル密度を用いてかきかえてみよう．結果はつぎのようになる．

Stokes の 定 理

任意の完全反対称テンソル密度 $\boldsymbol{A}^{\lambda\mu\nu}$ に対して

$$\frac{1}{3!}\oint_C \boldsymbol{E}^{-1}{}_{\lambda\mu\nu\alpha}\boldsymbol{A}^{\lambda\mu\nu}\,dx^\alpha = \frac{1}{2!\cdot 2!}\iint_S \boldsymbol{E}^{-1}{}_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\tau \boldsymbol{A}^{\mu\nu\tau}\,d\sigma^{\alpha\beta} \qquad (11.20)$$

が成り立つ．

Gauss の 定 理（3 次元）

任意の反対称テンソル密度 $\boldsymbol{F}^{\mu\nu}$ に対して

$$\frac{1}{2!\cdot 2!}\iint_S \boldsymbol{E}^{-1}{}_{\mu\nu\alpha\beta}\boldsymbol{F}^{\mu\nu}\,d\sigma^{\alpha\beta} = \frac{1}{3!}\iiint_V \boldsymbol{E}^{-1}{}_{\alpha\lambda\mu\nu}\partial_\tau \boldsymbol{F}^{\alpha\tau}\,dv^{\lambda\mu\nu} \qquad (11.21)$$

が成り立つ．

ついでに (11.10)″ も並べておこう．

Gauss の 定 理（4 次元）

任意のベクトル密度 $\boldsymbol{V}^\mu$ に対して

$$\frac{1}{3!}\iiint_V \boldsymbol{E}^{-1}{}_{\alpha\lambda\mu\nu}\boldsymbol{V}^\alpha\,dv^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{4!}\int\cdot\cdot\int_\omega \boldsymbol{E}^{-1}{}_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\tau \boldsymbol{V}^\tau\,d\omega^{\mu\nu\rho\sigma} \qquad (11.10)''$$

が成立する．

(11.6) から (11.20) を導くには

$$\boldsymbol{E}^{\alpha\beta\gamma\mu}A_\mu \to \boldsymbol{A}^{\alpha\beta\gamma} \qquad (11.22)$$

とすればよい．同様に，(11.8) から (11.21) を出すには

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}A_{\rho\sigma} \to \boldsymbol{F}^{\mu\nu} \qquad (11.23)$$

とおけばよい．最後に (11.10) から (11.10)″ を出すのには

$$\frac{1}{3!}\boldsymbol{E}^{\alpha\lambda\mu\nu}T_{\lambda\mu\nu} \to \boldsymbol{V}^\alpha \qquad (11.24)$$

とすればよい．

なお上にいろいろの関係が導かれたが，なかでも特に大事なものは (11.17) である．すなわち $\boldsymbol{T}^\mu$ がベクトル密度のときは

$$\partial_\mu \boldsymbol{T}^\mu = \text{スカラー密度} \qquad (11.25)$$

ということである．これは (11.24) の両辺に ∂_α を掛ければ (11.11) がテンソルであるということから容易に証明できる．同様に (11.23) の両辺に ∂_ν をほどこせば，任意の反対称テンソル密度 $\boldsymbol{F}^{\mu\nu}$ に対して

$$\partial_\nu \boldsymbol{F}^{\mu\nu} = \text{反変ベクトル密度} \tag{11.26}$$

ということがわかる．最後に，(11.22) の両辺に ∂_γ をほどこせば，任意の完全反対称テンソル密度 $\boldsymbol{A}^{\alpha\beta\gamma}$ に対して

$$\partial_\gamma \boldsymbol{A}^{\alpha\beta\gamma} = \text{反対称反変テンソル密度} \tag{11.27}$$

となることもわかる．ついでに任意の完全反対称テンソル密度 $\boldsymbol{T}^{\mu\nu\rho\sigma}$ に対して

$$\partial_\sigma \boldsymbol{T}^{\mu\nu\rho\sigma} = \text{完全反対称反変テンソル密度} \tag{11.28}$$

ということも容易にわかる．

なお蛇足とは思うが一言つけ加える．ここに与えられた Stokes や Gauss の定理はすべて積分が不変量の場合だから，いかなる座標系でも同じ形式の関係が成り立つ．しかしこれらの定理に登場した添字をもつ量がたとえテンソルやテンソル密度でなくても，ひとつの座標系に固執するならば，上に並べた公式はすべて成り立つことは自明であろう．ただその場合には他の座標系に移るときテンソルのような簡単な変換の規則がないので，x'－系における公式がどんな形になるか容易には予測できないというだけのことである．

§12. アフィン・テンソル，保存則，自由ベクトル

4 個の成分をもつある物理量 $\boldsymbol{v}^\mu$ が，いかなる座標系でも

$$\partial_\mu \boldsymbol{v}^\mu(x) = 0 \tag{12.1}$$

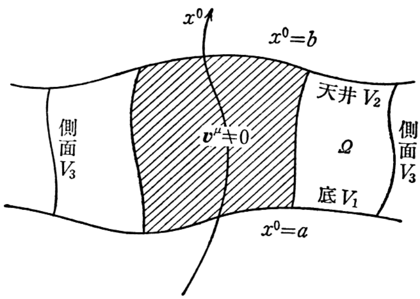
という形の方程式を満足するものとする．ここで $\boldsymbol{v}^\mu$ は一般座標変換に対してベクトル密度である必要はない．しかしアフィン変換に対してはベクトル密度として変換されるものとする．したがって (12.1) の左辺はアフィン・スカラー密度である．

さて，時空のなかに設けた座標系 (x－系) において，x^0 は時間的座標を示すものとする．いまある "瞬間"，すなわち x^0 = 一定 という超曲面を考えたとき，その面内で $\boldsymbol{v}^\mu \neq 0$ である 3 次元的領域が **第 4 図** の斜線の部分のよう

に空間的に有限のひろがりをもつものとし，その外側では $\boldsymbol{v}^\mu$ はいたる所で0とする．そこで空間的座標 x^k $(k=1, 2, 3)$* の原点を $\boldsymbol{v}^\mu \neq 0$ という領域のなかに設ける．さらにこの領域から十分に遠ざかれば，つまり x^k が十分に大きな値をもつ点では，重力のポテンシャル** もすばやく0になるものとする．これを式で表わすとき，$x^k \to \infty$ に対して

$$\lim g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} \tag{12.2}$$

となるように座標系が選ばれているものとする．なお以上に述べた事情は，(12.2) も含めて，任意の時刻 x^0 において常に成り立つものと仮定する．このような事情が実際に起こりうるのは物理量 $\boldsymbol{v}^\mu$ の時空内における分布状態が極端に限局されている場合に限られる．そのような物理系を孤立系という．



第 4 図

さて，$x^0=a$，$x^0=b(>a)$ という2枚の3次元超曲面を考える．これらをそれぞれ V_1，V_2 とよぼう（第4図を見よ）．つぎに管状の $\boldsymbol{v}^\mu \neq 0$ の領域をとり囲んで，それより太い管 V_3（3次元）を考える．この管（これを世界管とよぼう）の内部で，しかも V_1，V_2 の間にはさまれた4次元領域を Ω とよぼう．またこの表面（3次元）V_1（底），V_2(天井)，V_3(側面）をひとまとめにして V とよぶことにする.***

さて Ω の中で (12.1) を積分する：

$$I \overset{d}{\equiv} \int \cdots \int_\Omega \partial_\mu \boldsymbol{v}^\mu \, d^4x = 0.$$

---

* 本節ではラテン文字の添字は 1，2，3 をとり空間的座標を示すものとする．これに対してギリシャ文字の添字は 0，1，2，3 を示すものと約束する．

** $g_{\mu\nu}$ が重力ポテンシャルを表わすということの説明は第3章にある．それまでは大ざっぱに，$g_{\mu\nu}(x) - \eta_{\mu\nu}$ が $\neq 0$ か否かによりポテンシャルの有無を判別すると考えてよい．

*** 世界管 V_3 の内部では V_1 と V_2 とは交差しないものとする．また V_1，V_2 による管 V_3 の切口は単連結と仮定する．

これに4次元の Gauss の定理 (11.10)′ を利用すると

$$\int_V \boldsymbol{E}^{-1}{}_{\mu\nu\rho\sigma}\boldsymbol{v}^{\mu}\,dv^{\nu\rho\sigma}=0 \tag{12.3}$$

となる．ところで上に述べた V の説明から，(12.3) の被積分量は側面 V_3 では0となる．つぎに超曲面 V_1, V_2 上で3次元体積要素を定義するのに必要な3個の無限小ベクトルを座標軸の接線ベクトル（向きも含めて）と一致するように選ぶ．したがって，$\delta_{(1)}x^{\mu}$, $\delta_{(2)}x^{\mu}$, $\delta_{(3)}x^{\mu}$ の成分は左から順に

$$(0,\ dx^1,\ 0,\ 0),\qquad (0,\ 0,\ dx^2,\ 0),\qquad (0,\ 0,\ 0,\ dx^3)$$

となる．それゆえ面 V_2（天井）上の点では $dv^{\lambda\mu\nu}$ の0でない成分は $dv^{123}=dx^1dx^2dx^3$（および添字の順をいれかえたもの）だけである．しかし面 V_1（底）上の点では面の外向き法線は x^0 軸の正の向きと逆であるから，

$$dv^{123}=-dx^1dx^2dx^3\ \ (V_1 \text{上の点})$$

としなければならない．これらの結果を (12.3) に代入すると

$$\int_{V_2}\boldsymbol{v}^0\,dx^1dx^2dx^3-\int_{V_1}\boldsymbol{v}^0\,dx^1dx^2dx^3=0 \tag{12.3$'$}$$

となる．一般に任意の $x^0=$ 一定 という超曲面の上で，管 V_3 の内部にある3次元領域を $V(x^0)$ とかくことにすれば，(12.3)′ により

$$J\overset{d}{\equiv}\int_{V(x^0)}\boldsymbol{v}^0(x^0,\ \vec{x})d^3x \tag{12.4}$$

は x^0 に無関係，すなわち定数となる．ここで $dx^1dx^2dx^3$ を d^3x とかいた．また $\vec{x}$ とは $(x^1,\ x^2,\ x^3)$ を示す．$\boldsymbol{v}^{\mu}$ は管 V_3 の外では0であるから，(12.4) を

$$J=\iiint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{v}^0(x^0,\ \vec{x})d^3x=\text{一定} \tag{12.4$'$}$$

とかいてもよい．

さきにも述べたように，$x^k\to\infty$ では，この座標系は (12.2) からわかるように Lorentz 系となる．したがって x^0 は無限遠では $c\times$ 時間 と解釈できる．そこで (12.4)′ から，J はこの物理系の保存量であることがわかる．つまり物理系を遠方（V_3 の外）から眺めたとき，時間 x^0 が経過しても J の値が変わらない．以上の理由から (12.1) を微分形式でかいた**保存則**という．

上の証明で天井の超曲面 $x^0=b$ の代りに任意の空間的超曲面（すなわち，面上のすべての点における接線ベクトルがすべて空間的ベクトルであるような面）$V_2{}^*$ を考えると，(12.4)′ はつぎのようになる．すなわち，上の証明と全く同じ推論により，また公式 (11.10)′ を用いて

$$\frac{1}{3!}\int_{V_2{}^*}\boldsymbol{E}^{-1}{}_{\mu\nu\rho\sigma}\boldsymbol{v}^{\mu}\,dv^{\nu\rho\sigma}=\int_{V_1}\boldsymbol{v}^0\,d^3x=J=\text{一定} \qquad (12.5)$$

となる．あるいはウエイトが -1 の共変ベクトル密度

$$dv_{\mu}\overset{d}{\equiv}\frac{1}{3!}\boldsymbol{E}^{-1}{}_{\mu\nu\rho\sigma}\,dv^{\nu\rho\sigma} \qquad (12.6)$$

を用いると

$$J=\int_{V_2{}^*}\boldsymbol{v}^{\mu}\,dv_{\mu}=\text{一定} \qquad (12.5)'$$

となる．

なお (12.6) で定義された dv_μ は面 $V_2{}^*$ の法線ベクトルに平行である．それはつぎのようにしてわかる．まず面上の任意の点 x における dv_μ をつぎのようにかき表わそう：

$$dv_{\mu}(x)=\frac{1}{3!}\boldsymbol{E}^{-1}{}_{\mu\nu\rho\sigma}\sum\epsilon_{[i,j,k]}d_{(i)}x^{\nu}d_{(j)}x^{\rho}d_{(k)}x^{\sigma}.$$

i, j, k は 1,2,3 のいずれかの値をとるものとし，$\sum$ は i, j, k についてそれぞれ 1 から 3 まで独立に和をとることを示す．また 3 個のベクトル $d_{(i)}x^{\mu}$ $(i=1, 2, 3)$ はすべて点 x において面に接しているものとする．最後に記号 ϵ は

$$\epsilon_{[i,j,k]}=\begin{cases}\ \ 1 & : [i,\ j,\ k]\to[1,\ 2,\ 3]\ \text{が偶置換のとき}\\ -1 & : [i,\ j,\ k]\to[1,\ 2,\ 3]\ \text{が奇置換のとき}\\ \ \ 0 & : \text{その他の場合}\end{cases}$$

である．いま第1の接線ベクトル $d_{(1)}x^{\mu}$ と dv_μ のスカラー積をとると

$$d_{(1)}x^{\mu}dv_{\mu}=\frac{1}{3!}\boldsymbol{E}^{-1}{}_{\mu\nu\rho\sigma}\sum\epsilon_{[i,j,k]}d_{(1)}x^{\mu}d_{(i)}x^{\nu}d_{(j)}x^{\rho}d_{(k)}x^{\sigma}.$$

ところで $\boldsymbol{E}^{-1}$ はその添字について完全反対称であるから，上式の右辺は 0 となる．全く同様に $d_{(2)}x^{\mu}$, $d_{(3)}x^{\mu}$ との内積も 0 となるから，dv_μ は点 x で面に垂直である．

さて，Jはつぎのような変換に対して不変である：

（a） 任意のアフィン変換 $x^\mu \to x^{\mu\prime} = a^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu$

（b） Ω の外部では新座標 $x^{\mu\prime}$ は $x^{\mu\prime} = x^\mu$，しかし Ω の内部では $x^{\mu\prime}$ は x の任意の連続関数でかまわない．このような x'-系への変換に対して

$$J = \int_{x^0=\text{一定}} v^0(x) d^3x = \int_{x^{0\prime}=\text{一定}} \boldsymbol{v}^{0\prime}(x') d^3x' \overset{d}{\equiv} J' \tag{12.7}$$

である．

[変換（a）に対する不変性の証明]

(12.5)$'$ の超曲面 $V_2{}^*$ として特に $x^{0\prime} = b$ という面を考える．仮定により $\boldsymbol{v}^\mu(x)$ はアフィン・ベクトル密度であるから $\boldsymbol{v}^\mu(x) dv_\mu$ はアフィン・スカラーである．したがって

$$\boldsymbol{v}^\mu(x) dv_\mu(x) = \boldsymbol{v}^{\mu\prime}(x') dv_\mu{}'(x')$$
$$= \frac{1}{3!} \boldsymbol{v}^{\mu\prime}(x') \boldsymbol{E}^{-1}{}_{\mu\nu\rho\sigma}{}' dv^{\nu\rho\sigma\prime}(x').$$

ここで $dv^{\nu\rho\sigma\prime}$ を張る $V_2{}^*$ 上の3個のベクトル $d_{(i)}x^{\nu\prime}$（$i = 1, 2, 3$）として特に

$$d_{(1)}x^{\nu\prime} = (0,\ dx^{1\prime},\ 0,\ 0),$$
$$d_{(2)}x^{\nu\prime} = (0,\ 0,\ dx^{2\prime},\ 0),$$
$$d_{(3)}x^{\nu\prime} = (0,\ 0,\ 0,\ dx^{3\prime})$$

をとれば $dv^{123\prime}(x') = dx^{1\prime} dx^{2\prime} dx^{3\prime}$（あるいは1, 2, 3を置換した成分）だけが $\neq 0$ となる．したがって

$$\boldsymbol{v}^\mu(x) dv_\mu(x) = \boldsymbol{v}^{0\prime}(x') dx^{1\prime} dx^{2\prime} dx^{3\prime} \overset{d}{\equiv} \boldsymbol{v}^{0\prime}(x') d^3x'.$$

そこで

$$J = \int_{x^0=b} \boldsymbol{v}^0(x) d^3x = \int_{x^{0\prime}=b} \boldsymbol{v}^{0\prime}(x') d^3x'. \tag{12.8}$$

なおこの右辺は，証明をくり返すまでもなく，b の値に無関係である．

[変換（b）に対する不変性の証明]

いま第3の座標系（x''-系）をつぎのように設ける．Ω の外部では $x^\mu = x^{\mu\prime} = x^{\mu\prime\prime}$ とする．また $x^{0\prime\prime} = a$ という超曲面は $x^0 = a$ という超曲面と一致する．しかし超曲面 $x^{0\prime\prime} = b$ は $x^{0\prime} = b$ という超曲面に一致するように x''-

系を選ぶ．これらの制限以外は x''－系としてはどんなものでもよい．

x''－系からみた物理量 $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{v}^{\mu''}(x'')$ とすれば，仮定により

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}^{\mu''}(x'')}{\partial x^{\mu''}} = 0$$

を満足し，さらに境界面上では

$$\boldsymbol{v}^{\mu''}(\vec{x}'',\ x^{0''} = a) = \boldsymbol{v}^{\mu}(\vec{x} = \vec{x}'',\ \ x^{0} = a),$$

$$\boldsymbol{v}^{\mu''}(\vec{x}'',\ x^{0''} = b) = \boldsymbol{v}^{\mu'}(\vec{x}' = \vec{x}'',\ \ x^{0'} = b)$$

が成立する．したがって

$$J' \overset{d}{\equiv} \int_{x^{0'}=b} \boldsymbol{v}^{\mu'}(x')d^3x' = \int_{x^{0''}=b} \boldsymbol{v}^{\mu''}(x'')d^3x''$$

$$= \int_{x^{0''}=a} \boldsymbol{v}^{\mu''}(x'')d^3x'' = \int_{x^{0}=a} \boldsymbol{v}^{\mu}(x)d^3x \overset{d}{\equiv} J. \qquad (12.9)$$

つまり J は変換（b）に対して不変である．

上に述べたことの応用としてつぎのようなものがある．いま $\boldsymbol{w}^{\mu}{}_{\nu}$ は一般座標変換に対して必ずしもテンソル密度である必要はないが，アフィン変換に対してはテンソル密度であるとする．$\boldsymbol{w}^{\mu}{}_{\nu}$ は世界管 V_3 の外では 0，また内部では，いかなる座標系を基準にした場合も常に

$$\partial_{\mu}\boldsymbol{w}^{\mu}{}_{\nu}(x) = 0$$

という形の方程式を満足するものとする．いま

$$J_{\nu} \overset{d}{\equiv} \int_{x^{0}=a} \boldsymbol{w}^{0}{}_{\nu}(x)d^3x \qquad (12.10)$$

とおけば，J_{ν} はつぎの性質をもつ．

（c） J_{ν} は時刻 a に無関係な定数である．

（d） 任意の空間的超曲面を $V_2{}^*$ とするとき，

$$J_{\nu} = \int_{V_2{}^*} \boldsymbol{w}^{\mu}{}_{\nu}\, dv_{\mu} \qquad (12.11)$$

が成立する．ここで dv_{μ} は面 $V_2{}^*$ に垂直な面積要素を表わし，（12.6）がその定義である．

（e） J_{ν} はアフィン共変ベクトルである．

（f） J_ν は前に述べた変換（b）に対して不変である．

[（c）の証明]

いま x－系を基準にしたとき Ω 内で任意の定数値を成分とするアフィン・ベクトル a^ν を考える．

$$\boldsymbol{v}^\mu \overset{d}{\equiv} \boldsymbol{w}^\mu{}_\nu(x)a^\nu \tag{12.12}$$

とおけば，この $\boldsymbol{v}^\mu$ は（12.1）を満足する反変アフィン・ベクトル密度である．したがって（12.4）により

$$J \overset{d}{\equiv} J_\nu a^\nu = (x^0 \text{ に無関係}).$$

[（d）の証明]

（12.5)′ から

$$a^\nu J_\nu = J = a^\nu \int_{V_2{}^*} \boldsymbol{w}^\mu{}_\nu(x) dv_\mu\,.$$

a^ν は任意のベクトルであるから

$$J_\nu = \int_{V_2{}^*} \boldsymbol{w}^\mu{}_\nu dv_\mu\,.$$

[（e）の証明]

（12.8）により J はアフィン変換に対して不変．一方，$J = a^\nu J_\nu$ において a^ν は任意のアフィン・ベクトルである．したがって，§8 の定理 2 により J_ν はアフィン共変ベクトルである．

[（f）の証明]

（b）の証明に用いた x''－系を再び考える． この座標系を基準にした場合，任意の定数値を成分とするアフィン・ベクトルを b^ν とする． これを用いて（12.12）と同様に $\boldsymbol{v}^\mu$ を定義すれば，x''－系では，（c）の場合と同様に

$$J_\nu'' \overset{d}{\equiv} \int_{x^{0''}=a} \boldsymbol{w}^0{}_\nu''(x'') d^3x''$$

は $x^{0''}(=a)$ に無関係な定数となる．したがって

$$J_\nu' \overset{d}{\equiv} \int_{x^{0'}=b} \boldsymbol{w}^0{}_\nu'(x') d^3x' = \int_{x^{0''}=b} \boldsymbol{w}^0{}_\nu''(x'') d^3x'' = J_\nu''$$

$$= \int_{x^{0''}=a} \boldsymbol{w}^0{}_\nu{}''(x'') d^3x'' = \int_{x^0=a} \boldsymbol{w}^0{}_\nu(x) d^3x \overset{d}{\equiv} J_\nu .$$

以上の証明では特に $|\vec{x}| \to \infty$ で $g_{\mu\nu}$ が $\eta_{\mu\nu}$ に近づくべしという仮定や，変換（b）について，Ω の外では $x^{\mu\prime} = x^\mu$ となるべしという制限はどこにも使用されなかった．しかし上述の結論を一般相対論に応用しようとすると，これらの仮定が不可欠のものとなる．一般相対論では重力場のエネルギー・運動量テンソル密度とよばれる量 $\boldsymbol{t}^\mu{}_\nu$ が問題にされる．これはアフィン・テンソル密度ではあるが $\boldsymbol{w}^\mu{}_\nu$ と同様に，一般座標変換に対してはテンソル密度ではない．しかしそれは，いかなる座標系でも

$$\partial_\mu \boldsymbol{t}^\mu{}_\nu = 0$$

を満足する．さらにこれは $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^\lambda$ の２次同次式である．したがって $\boldsymbol{t} \neq 0$ という領域が世界管 V_3 の中に局在するためには，$|\vec{x}| \to \infty$ で $g_{\mu\nu}$ がすばやく $\eta_{\mu\nu}$ となる必要がある．また座標変換を考えるときも，$g_{\mu\nu}$ に対するこの制限を保持するためには（b）に述べた制限が不可欠となることが理解できよう．

なお上に導いた J_ν はアフィン・ベクトルであるばかりでなく，（f）に述べたような不変性をもつ．しかし一般座標変換に対する共変ベクトルのように特定の世界点に結びついた量ではない．そこで Klein は J_ν を自由ベクトルと名づけた．一般相対論では重力場の全エネルギー，および全運動量がこの種のベクトルで表わされる．これについては後に再び述べる（§29 参照）．

§13.　平行移動，測地系

すでに何度も述べたように異なる世界点におけるベクトルの差はベクトルとはならない．したがって任意のベクトル場 $A_\mu(x)$ が与えられているとき，それの微分

$$\partial_\nu A_\mu(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x^\nu} \{A_\mu(x + \Delta x) - A_\mu(x)\} \tag{13.1}$$

はテンソルではない．これがテンソルとなるのはアフィン変換の場合にかぎられる．一般座標変換の場合にも微分係数がテンソルとなるためには（13.1）の

右辺第2項を修正する必要がある．すなわち $A_\mu(x)$ の代りに，これを点 $x+\Delta x$ まで，ある意味で“平行”に移動させたものを用いれば，同一の点 $x+\Delta x$ における2個のベクトルの差となるから，右辺の分子はベクトルとなる．それでは“平行”をどのように定義したらよいだろうか．

いま $A_\mu(x)$ を点 x から $x+\Delta x$ まで平行に移動したものを

$$A_\mu(x+\Delta x)_{/\!/}$$

とかくことにし，これが点 $x+\Delta x$ における共変ベクトルであるとする．Euclid 空間の中に直交座標系を設けた場合には平行の定義は

$$A_\mu(x+\Delta x)_{/\!/}=A_\mu(x) \tag{13.2}$$

で与えられる．そこでこれを手本とし，$A_\mu(x+\Delta x)_{/\!/}$ が点 $x+\Delta x$ におけるベクトルとなるように，Riemann 空間も含めた一般の空間における平行移動を定義しよう．

まず Euclid 空間内に曲線座標系を設けた場合を考えてみよう．(13.2) の Δx を無限小量とするとき，曲線座標系では (13.2) はもはや成立せず，この右辺に付加項が現われる．それは $A(x)$ の1次式であり，また Δx の1次までの近似では Δx についても1次式となる．そこで一般の空間において任意の座標系を用いたとき，**無限小平行移動**を

$$A_\mu(x+\Delta x)_{/\!/}\overset{d}{\equiv}A_\mu(x)+\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\Delta x^\nu A_\lambda(x) \tag{13.3}$$

と定義する．右辺の第2項の係数 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ は一般には x の関数と考えるべきである．しかしそれはベクトルの成分 A や Δx には無関係であるとする．この Γ が x のどのような関数であるかは空間の性質による．というよりはむしろ逆に $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(x)$ としてどのような関数を採用するかに応じて，ここに問題にしている空間の幾何学的性質が規定される．もともと空間内の任意の点 x にある任意の共変ベクトルを，点 x に近接した他の任意の点 $x+\Delta x$ まで平行に移動させたとき，それがどのようなものに変わるかは空間の性質によることであるが，$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(x)$ を与えれば，この移動の規則が決定される．

ところで (13.3) は，点 x に在るベクトル $A_\mu(x)$ の，$x+\Delta x$ におけるベクトル $A_\mu(x+\Delta x)_{/\!/}$ への線形写像と考えられる．この写像を**アフィン接続**

という．また $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x)$ が空間内の各点に与えられているとき，その空間を**アフィン接続された空間**とか，ちぢめて**アフィン接続空間**という．また Γ を**アフィン係数**あるいは**接続係数**とよぶ．

関数 $\Gamma(x)$ は，つぎに述べる唯一の条件を除けば，何でもよい．その条件とはつぎのような変換則を満たさねばならないということである．すなわち任意の他の座標系（x'-系）におけるアフィン係数を $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}{}'(x')$ とするとき，Γ と Γ' の間には

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}{}'(x')=\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\nu'}}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}(x)+\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}} \tag{13.4}$$

という関係が満たされねばならない．

この変換則は $A_\mu(x+\Delta x)_{/\!/}$ が点 $x+\Delta x$ における共変ベクトルであるという要請から導かれる．すなわち

$$\begin{aligned}A_\mu{}'(x'+\Delta x')_{/\!/}&=\left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}}\right)_{x+\Delta x}A_\nu(x+\Delta x)_{/\!/}\\&=\left\{\left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}}\right)_x+\frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x^{\rho'}\partial x^{\mu'}}\Delta x^{\rho'}\right\}\{A_\nu(x)+\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\tau}\Delta x^{\tau}A_\lambda(x)\},\end{aligned}$$

Δx の1次までの近似では

$$=\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}}A_\nu(x)+\frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x^{\rho'}\partial x^{\mu'}}\Delta x^{\rho'}A_\nu(x)+\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\tau}\Delta x^{\tau}A_\lambda(x).$$

この式の中の A と Δx をベクトルの変換則を使って

$$A_\nu(x)=\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\nu}}A_\sigma{}'(x'),\qquad \Delta x^{\tau}=\frac{\partial x^{\tau}}{\partial x^{\rho'}}\Delta x^{\rho'}$$

のようにかきかえると

$$\begin{aligned}A_\mu{}'(x'+\Delta x')_{/\!/}=A_\mu{}'(x')+\Bigg\{&\frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x^{\rho'}\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\nu}}\\&+\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\tau}\frac{\partial x^{\tau}}{\partial x^{\rho'}}\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\lambda}}\Bigg\}\Delta x^{\rho'}A_\sigma{}'(x').\end{aligned}$$

一方，定義（13.3）によれば，x'-系では

$$A_\mu{}'(x'+\Delta x')_{/\!/}=A_\mu{}'(x')+\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\rho}{}'(x')\Delta x^{\rho'}A_\sigma{}'(x')$$

となる．そこで両者を比べるとき，$\Delta x^{\rho'}$, $A_\sigma{}'(x')$ が任意のベクトルであること

に注意すれば（13.4）が導かれる．

（13.4）によれば3個の添字をもつ Γ は一般座標変換に対して混合テンソルではない．ただ x が x' の1次式，つまり $x\to x'$ がアフィン変換のときは（13.4）の右辺第2項は0となり，Γ はアフィン混合テンソルとなる．

さて空間内の各点に2種類のアフィン係数 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(x)$ および $\bar{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}(x)$ が与えられているとする．したがって任意のベクトル $A_\mu(x)$ を $x+\varDelta x$ まで平行移動させるとき，Γ と $\bar{\Gamma}$ のいずれを採用するかにより，平行移動後のベクトル $A_\mu(x+\varDelta x)_{/\!/}$ には2通りの答がうまれる．しかし両者の差は同一点におけるベクトルの差であるから，もちろんベクトルである．いま Γ および $\bar{\Gamma}$ を用いたときの $A_{\mu/\!/}$ をそれぞれ $A_\mu(\Gamma)_{/\!/}$，$A_\mu(\bar{\Gamma})_{/\!/}$ とかくことにすれば

$$A_\mu(\bar{\Gamma})_{/\!/}-A_\mu(\Gamma)_{/\!/}=\{\bar{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}(x)-\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(x)\}\varDelta x^\nu A_\lambda(x).$$

上の説明から左辺はベクトルである．また $\varDelta x^\nu$, A_λ は任意のベクトルと考えてよい．したがって

$$\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(x)\overset{d}{\equiv}\bar{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}(x)-\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(x)$$

は一般座標変換に対して添字の示すタイプの混合テンソルである．この結論は，Γ, $\bar{\Gamma}$ がいずれもアフィン係数である以上（13.4）という変換則を満足しているという事実を考えれば直接にも証明できる．すなわち $\delta\Gamma$ の変換則は

$$\begin{aligned}\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}{}'(x')&\overset{d}{\equiv}\bar{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}{}'(x')-\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}{}'(x')\\&=\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\tau}{\partial x^{\nu'}}\delta\Gamma^\alpha{}_{\beta\tau}(x)\end{aligned}$$

となることが容易にわかる．

$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(x)$ の下つき添字 μ,ν については，元来，特別な対称性はない．そこで Γ を μ,ν について対称と反対称の部分に分ける：

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}=\Gamma^\lambda{}_{(\mu\nu)}+F^\lambda{}_{\mu\nu}.$$

ただし

$$\Gamma^\lambda{}_{(\mu\nu)}\overset{d}{\equiv}\frac{1}{2}(\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}+\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu})=\Gamma^\lambda{}_{(\nu\mu)},$$

$$F^\lambda{}_{\mu\nu}\overset{d}{\equiv}\frac{1}{2}(\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}-\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu})=-F^\lambda{}_{\nu\mu}.$$

この F は上に述べた $\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ の特別な例である．それゆえ $F^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ は μ, ν について反対称な3階テンソルである．したがって，ある座標系でその成分のうち少くともひとつでも $\neq 0$ のものが存在すれば，いかなる座標系でも F の全成分が一挙に0となることはありえない．これに反して $\Gamma^{\lambda}{}_{(\mu\nu)}$ はテンソルではなく，もとの $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ と同じ変換則に従う．

さて，(13.4) には Γ に比例しない項が存在するから，これを逆に利用して座標系を適当に選び，点 x における $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x)$ の全成分を一挙に消去することができるかもしれないという考えが浮かぶ．これについてはつぎのような定理がある．

定理5. 座標系を適当に選ぶことにより，1点 x における $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x)$ のすべての成分を一挙に消去できるための必要十分条件は，$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x)$ が μ, ν について対称であるということである．

[必要条件であることの証明]

いま x'-系を適当にとったとき，$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}{}'(x')$ がすべて0になったとすれば，変換則 (13.4) から

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}{}'(x')=0=\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\nu'}}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}(x)+\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}}.$$

両辺に $\dfrac{\partial x^{a}}{\partial x^{\lambda'}}\dfrac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{b}}\dfrac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{c}}$ を掛けると

$$\Gamma^{a}{}_{bc}(x)=-\frac{\partial^2 x^{a}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}}\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{b}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{c}}$$

となる．この右辺は b, c のいれかえに対して対称である．したがって，この等式が成立するためには $\Gamma^{a}{}_{bc}$ も b, c について対称でなければならない．

[十分条件であることの証明]

簡単のために問題にしている点を座標原点 $x^{\mu}=0$ にとる．いま，新旧座標 x' と x の関係を

$$x^{\mu}=x^{\mu'}+\frac{1}{2}a^{\mu}{}_{\alpha\beta}x^{\alpha'}x^{\beta'}$$

とする．$a^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ は x' に無関係な未定の定数で，添字 α, β について対称である．

この関係式を x' について解いた答のうち，$x=0$ では $x'=0$ となるような解をとることにする．したがって $x=0$ の近くでは

$$x^{\mu\prime} = x^{\mu} - \frac{1}{2}a^{\mu}{}_{\rho\sigma}x^{\rho}x^{\sigma} + \cdots$$

という形の関係が成り立つ．そこで原点 $x=x'=0$ では

$$\left(\frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^{\nu}}\right)_{x=0} = \delta^{\mu}{}_{\nu}, \qquad \left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu\prime}}\right)_{x'=0} = \delta^{\nu}{}_{\mu}.$$

したがって（13.4）は

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}{}'(x'=0) = \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x=0) + a^{\lambda}{}_{\mu\nu}$$

となる．いま $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x)$ が μ, ν について対称とすれば，未定の係数 $a^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ を

$$a^{\lambda}{}_{\mu\nu} = -\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x=0)$$

ととることにより，x'-系の原点で $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}{}'(x'=0)=0$ とすることができる．つまり $\Gamma'(x'=0)=0$ とするには $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x)$ が μ, ν について対称であるというだけで十分である．

定理5はつぎのようにいいかえてもよい．

定理6. 適当な座標系を採ることにより，1点 x にある任意の共変ベクトルを，それに隣接した他の任意の点 $x+\Delta x$ まで平行移動させたとき，ベクトルの成分を不変にすることができるためには $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x)$ が μ, ν について対称である必要があり，またそれだけで十分である．

さて，ある座標系を基準にとったとき，ある1点 x において，そこのアフィン係数 $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x)$ がすべて0となったとき，この座標系を点 x における**測地（座標）系**と呼ぶ．またこの座標系は点 x において**測地的**であるという．この言葉を用いると，点 x で測地系が存在するための必要十分条件は $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x)=\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}(x)$ ということになる．

いままで述べたことからわかるように，アフィン接続という概念は，元来，計量とは無関係である．実際 $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ の定義には $g_{\mu\nu}$ は全く不必要であった．ところでわれわれが相対論で問題にする Riemann 空間では，その各点に $g_{\mu\nu}(x)$ が与えられている．これに加えて，さらに接続係数 $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x)$ も各点に賦与した場合，これらの間にはどのような関係が存在するかを考えてみよう．

Riemann 空間では共変ベクトル場 $A_\mu(x)$ が存在するとき，それの大きさ $\{|g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu|\}^{1/2}$ について議論することができる．Euclid 空間では，ベクトルを平行移動させてもその大きさは不変である．そこで Riemann 空間でも，点 x に在るベクトル $A_\mu(x)$ を $x+\Delta x$ まで平行に移したとき，たとえその成分は(13.3)のように変化しても，その大きさは不変であると要請しよう．これを式でかくと

$$g^{\mu\nu}(x+\Delta x)A_\mu(x+\Delta x)_{/\!/}A_\nu(x+\Delta x)_{/\!/} = g^{\mu\nu}(x)A_\mu(x)A_\nu(x). \tag{13.5}$$

この左辺に (13.3) の定義を代入し，Δx の1次までの近似で両辺を比べるとつぎの関係式が求まる．

$$\partial_\lambda g^{\mu\nu} + g^{\mu\rho}\Gamma^\nu{}_{\rho\lambda} + g^{\nu\rho}\Gamma^\mu{}_{\rho\lambda} = 0. \tag{13.6}$$

ここで Δx，およびベクトル A は任意に選びうるということを用いた．

ところで§9に述べた

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta} \qquad \text{あるいは} \qquad \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda}$$

という関係を思い起こすと，(13.6) は

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} = g_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\beta\lambda} + g_{\beta\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\lambda} \tag{13.6$'$}$$

となる．いま

$$\Gamma_{\alpha,\beta\lambda} \overset{d}{\equiv} g_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\beta\lambda} \tag{13.7}$$

とかくことにすれば，上の式は

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\alpha,\beta\lambda} + \Gamma_{\beta,\alpha\lambda} \tag{13.8}$$

となる．上式の α, β, λ を輪換させると

$$\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\beta} = \Gamma_{\lambda,\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha,\lambda\beta}, \tag{13.8$'$}$$

$$\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^\alpha} = \Gamma_{\beta,\lambda\alpha} + \Gamma_{\lambda,\beta\alpha}. \tag{13.8$''$}$$

ここで Γ は下つき添字の置換に対して対称と仮定する．つまり Riemann 空

間の各点では測地系が必ず存在すると仮定する．このようなときは (13.8) + (13.8)′ − (13.8)″ から

$$\frac{1}{2}(\partial_\lambda g_{\alpha\beta}+\partial_\beta g_{\lambda\alpha}-\partial_\alpha g_{\beta\lambda})=\Gamma_{\alpha,\beta\lambda}, \tag{13.9}$$

あるいは (13.7) により

$$\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}=g^{\lambda\sigma}\Gamma_{\sigma,\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\alpha g_{\beta\sigma}+\partial_\beta g_{\alpha\sigma}-\partial_\sigma g_{\alpha\beta}) \tag{13.9$'$}$$

という関係が導かれる．つまり Riemann 空間では，下つき添字について対称なアフィン係数を採用したために，その接続係数は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ により完全にきまってしまう．したがって勝手に Γ を各点に割り振ることはできない．

(13.9)，(13.9)′は，ベクトルを平行移動させてもその大きさが不変という要請，および空間の各点で測地系を選ぶことが必ずできるという要請の結果導かれたものである．このように計量だけで接続係数まできまってしまう空間を**計量接続空間**という．今後 Riemann 空間というときはこの種の空間をさすものとする．

Riemann 空間に対するこの定義に従えば，そのなかの任意の点で適当に座標系（X-系）をとることにより，その点の無限小近傍における距離の定義を

$$ds^2=\eta_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu$$

という形にすることができるばかりでなく，さらにその点におけるアフィン係数も 0 にさせることが必ずできる．つまり X-系を基準にとれば，少くともその点の無限小近傍内では，ベクトルを平行移動させても，その成分も大きさも不変となる．いいかえれば，この点のまわりには無限小のひろがりをもった Euclid 空間（厳密には擬 Euclid 空間というべきである）が出現する．いままではある座標系から眺めたとき，ある1点の近傍が無重力地帯となったとき，その座標系を，その点における局所 Lorentz 系と呼んだ．しかし今後は上に説明したような座標系を**局所 Lorentz 系**とよぶことにする．これが物理的には，問題の点のまわりを無重力地帯にさせる座標系であること，つまり従来の定義と同一であることはつぎの章で明らかになるであろう．

Γ と $g_{\mu\nu}$ との関係 (13.6)′ をみればわかるように，ある点で Γ が 0 ならば，

その点における $g_{\mu\nu}$ の1階微係数もすべて0となる．したがって点Pにおける局所 Lorentz 系とは，それを基準にとったとき

$$g_{\mu\nu}(P)=\eta_{\mu\nu}, \qquad \partial_\lambda g_{\mu\nu}(P)=0 \tag{13.10}$$

が成立する座標系のことである．

いままではもっぱら共変ベクトルの平行移動についてだけ議論をしてきた．しかしこれをもとにすれば反変ベクトルや任意の階数のテンソルに対する平行移動の法則も容易に導くことができる．

そのためにはまず共変ベクトル A_μ の代りに $B_\mu(x)+\lambda C_\mu(x)$ というベクトルを考えよう．λ は任意のパラメーターであり，B_μ, C_μ はいずれも任意の共変ベクトルでよい．この大きさは平行移動しても不変のはずであるから

$$g^{\mu\nu}B_\mu B_\nu+2\lambda g^{\mu\nu}B_\mu C_\nu+\lambda^2 g^{\mu\nu}C_\mu C_\nu$$

は λ のいかなる値に対しても不変である．そこで λ の各べきごとに不変という結論が導かれる．特に λ^1 の項から

$$g^{\mu\nu}(x+\Delta x)B_\mu(x+\Delta x)_{/\!/}\cdot C_\nu(x+\Delta x)_{/\!/}=g^{\mu\nu}(x)B_\mu(x)C_\nu(x)$$

が導かれる．あるいは

$$g^{\mu\nu}(x+\Delta x)C_\nu(x+\Delta x)_{/\!/}\overset{d}{\equiv}C^\mu(x+\Delta x)_{/\!/}$$

とかくことにすれば

$$B_\mu(x+\Delta x)_{/\!/}C^\mu(x+\Delta x)_{/\!/}=B_\mu(x)C^\mu(x). \tag{13.11}$$

この左辺の $B_\mu(x+\Delta x)_{/\!/}$ に (13.3) を代入すると，B_μ が任意のベクトルであるという事実を考えにいれることにより

$$C^\mu(x+\Delta x)_{/\!/}=C^\mu(x)-\Gamma^\mu{}_{\sigma\rho}(x)\Delta x^\rho C^\sigma(x+\Delta x)_{/\!/}$$

となる．Δx が無限小量であることを考慮すれば，反変ベクトルの平行移動はつぎのように定義すればよい：

$$C^\mu(x+\Delta x)_{/\!/}\overset{d}{\equiv}C^\mu(x)-\Gamma^\mu{}_{\sigma\rho}(x)\Delta x^\rho C^\sigma(x). \tag{13.12}$$

ここで任意のテンソルは定理1 (p. 34) により適当な個数のベクトルのベクトル積の和として表わされることを思い起こせば，テンソルの平行移動に対する定義も容易に思いつくであろう．ここでは2階混合テンソル $T^\mu{}_\nu(x)$ の平行

移動に対する定義をかこう：

$$T^{\mu}{}_{\nu}(x+\Delta x)_{/\!/} \overset{d}{\equiv} T^{\mu}{}_{\nu}(x) - \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\rho}(x)\Delta x^{\rho} T^{\sigma}{}_{\nu}(x) + \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\rho}(x)\Delta x^{\rho} T^{\mu}{}_{\sigma}(x). \tag{13.13}$$

この定義によれば $g_{\mu\nu}(x+\Delta x)_{/\!/}$ は

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x+\Delta x)_{/\!/} &= g_{\mu\nu}(x) + \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\rho}\Delta x^{\rho} g_{\sigma\nu} + \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\rho}\Delta x^{\rho} g_{\mu\sigma} \\ &= g_{\mu\nu}(x) + (\Gamma_{\nu,\mu\rho} + \Gamma_{\mu,\nu\rho})\Delta x^{\rho} \end{aligned}$$

となる．ところで Riemann 空間では（13.8）が成立する．したがって

$$g_{\mu\nu}(x+\Delta x)_{/\!/} = g_{\mu\nu}(x) + \partial_{\rho} g_{\mu\nu}(x)\Delta x^{\rho} \approx g_{\mu\nu}(x+\Delta x)$$

となる．すなわち Δx の 1 次の近似で

$$g_{\mu\nu}(x+\Delta x)_{/\!/} = g_{\mu\nu}(x+\Delta x) \tag{13.14}$$

が常に成立している．

ここで一言つけ加えよう．Euclid 空間の場合にならって，*

$$\cos\theta \overset{d}{\equiv} \frac{B_{\mu}(x)C^{\mu}(x)}{\sqrt{|B^2|}\cdot\sqrt{|C^2|}}$$

によりベクトル B, C の間の角 θ（これはもちろん x の関数である）を定義すると，（13.11）からつぎのことがわかる．すなわち，任意の 2 個のベクトル B, C の間の角は，両ベクトルを無限小平行移動させても，その値が不変である．

計量接続（13.9）′は，さきにも述べたように，（a） $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ が μ, ν について対称，（b） ベクトルの大きさは平行移動しても変わらないという 2 つの仮定から導かれたものである．もしこの一方でも成立しなければ，（13.9）′は成り立たない．

たとえば $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ は μ, ν について対称でないとして

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}{}_{(\mu\nu)} + F^{\lambda}{}_{\mu\nu}$$

とおこう．$\Gamma^{\lambda}{}_{(\mu\nu)}$ は μ, ν について対称，$F^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ は反対称とする．しかし，仮定（b）が成立するとすれば（13.8）は前と同様に成り立つ．そこで，（13.8）＋

* 時空の $g_{\mu\nu}$ は正定符号ではない．したがって $|\cos\theta| > 1$ の場合もありうる．つまり θ は虚数となることもある．

(13.8)′ − (13.8)″ を計算すると，(13.9) の代りに

$$\frac{1}{2}(\partial_\lambda g_{\alpha\beta} + \partial_\beta g_{\lambda\alpha} - \partial_\alpha g_{\beta\lambda}) = \Gamma_{\alpha,(\beta\lambda)} + F_{\beta,\alpha\lambda} + F_{\lambda,\alpha\beta},$$

あるいは

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha,\beta\lambda} &= \Gamma_{\alpha,(\beta\lambda)} + F_{\alpha,\beta\lambda}\\ &= \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\lambda} + g_{\lambda\alpha,\beta} - g_{\beta\lambda,\alpha})\\ &\qquad - (F_{\beta,\alpha\lambda} + F_{\lambda,\alpha\beta} - F_{\alpha,\beta\lambda})\end{aligned} \tag{13.15}$$

となる．つまりアフィン係数は $g_{\mu\nu}$ の微分のほかに3階テンソル F にも依存する．

逆に (a) は成立しているが，ベクトルの大きさの不変性は成り立たないとしよう．このような場合は Weyl によって考案された．彼はベクトルの成分が平行移動によって Δx に比例した変化をこうむると同様に，その大きさも Δx に比例した変化をすると仮定した．いま，ベクトル A_μ の大きさの2乗を

$$\{A(x)\}^2 \overset{d}{\equiv} g^{\mu\nu}(x)A_\mu(x)A_\nu(x)$$

とかくことにすれば，大きさの変化を示す Weyl の規則は

$$\{A(x+\Delta x)_{/\!/}\}^2 - \{A(x)\}^2 \overset{d}{\equiv} \Delta x^\mu \varphi_\mu(x)\{A(x)\}^2 \tag{13.16}$$

で与えられる．ベクトル $\varphi_\mu(x)$ はアフィン係数と同様に，Δx や A に無関係な，空間の特徴を示す或る関数である．つまりどんなベクトルでも，x から $x+\Delta x$ まで平行移動すれば，その成分は (13.3) により変化し，その大きさは (13.16) という変化をこうむる．(13.16) の左辺第1項は

$$\{A(x+\Delta x)_{/\!/}\}^2 \overset{d}{\equiv} g^{\mu\nu}(x+\Delta x)A_\mu(x+\Delta x)_{/\!/}\cdot A_\nu(x+\Delta x)_{/\!/}$$

である．これに (13.3) を代入して Δx の1次の近似で (13.16) の両辺を比べると

$$\partial_\rho g^{\mu\nu} + g^{\mu\alpha}\Gamma^\nu{}_{\alpha\rho} + g^{\nu\alpha}\Gamma^\mu{}_{\alpha\rho} = \varphi_\rho g^{\mu\nu}$$

という関係が求まる．そこで (13.6) から (13.9)′ を導いたのと同様にすれば

$$\Gamma_{\alpha,\beta\lambda} = \frac{1}{2}\{\partial_\beta g_{\lambda\alpha} + \partial_\lambda g_{\beta\alpha} - \partial_\alpha g_{\beta\lambda}\} + \frac{1}{2}\{\varphi_\beta g_{\lambda\alpha} + \varphi_\lambda g_{\beta\alpha} - \varphi_\alpha g_{\beta\lambda}\}. \tag{13.17}$$

この場合にも Γ は $g_{\mu\nu}$ の微分だけでは表わすことができず，別にベクトル場 φ_β が必要となる．アフィン係数が（13.17）で与えられ，ベクトルの大きさが，平行移動に際して（13.16）という規則により変化する空間を **Weyl 空間** という．

一般相対論ではさきにも述べたように Riemann 空間を用いて時空を表わす．したがって（13.15）や（13.17）のような接続係数は本書では問題にしない．

§14. 共変微分

前節で準備した平行移動の定義を用いれば，ベクトルやテンソルの微分が，微分される以前の量より 1 階だけ階数の高いテンソルとなるように微分演算の定義を修正することは容易である．

まず手はじめとして共変ベクトル $A_\mu(x)$ の微分を

$$\nabla_\nu A_\mu(x) \overset{d}{\equiv} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x^\nu}\{A_\mu(x+\Delta x) - A_\mu(x+\Delta x)_{/\!/}\} \qquad (14.1)$$

と定義する．この右辺の分子は同一の点 $x+\Delta x$ における 2 個のベクトルの差であるから，もちろんベクトルである．したがって右辺は 2 階共変テンソルである．このような定義に従う微分演算を普通の微分と区別するために **共変微分** とよび，左辺のような記号で表わすことにする．一般の書物や文献では共変微分を

$$A_{\mu;\nu}, \qquad A_{\mu\|\nu}$$

のようにかく場合がある．しかし本書では共変微分は（14.1）のような記号を使い，普通の微分には

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \overset{d}{\equiv} \partial_\nu A_\mu \qquad \text{あるいは} \qquad A_{\mu,\nu}$$

のような記号を使うことにする．

（14.1）の右辺に（13.3）を代入すると

$$\nabla_\nu A_\mu \overset{d}{\equiv} \partial_\nu A_\mu(x) - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(x) A_\lambda(x) \qquad (14.2)$$

となる．Γ の変換性（13.4）を使うと，この右辺が確かに2階共変テンソルになっていることが証明できる．この証明は練習問題として読者にまかせよう．

共変ベクトル以外の量についても，すでに前節で $\varDelta x$ の1次までの近似で平行移動の定義が与えられている．したがってそれらを用いれば，共変微分の定義を導くことは容易である．平行移動の定義において $\varDelta x$ の2次以上は具体的には与えられていないが，それらは微分の定義に際しては $\varDelta x\to 0$ の極限ですべて不要となるから，前節の定義で十分である．例として反変ベクトルならびに2階テンソルの共変微分の定義をかくと，つぎのようになる：

$$\nabla_\nu B^\mu \overset{d}{\equiv} \partial_\nu B^\mu + \Gamma^\mu{}_{\rho\nu} B^\rho , \tag{14.3}$$

$$\nabla_\lambda T^\mu{}_\nu \overset{d}{\equiv} \partial_\lambda T^\mu{}_\nu + \Gamma^\mu{}_{\rho\lambda} T^\rho{}_\nu - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} T^\mu{}_\rho .$$

なお（13.14）に対応して特に $g_{\mu\nu}$ については

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} \equiv 0 \tag{14.4}$$

となる．この左辺はテンソルの共変微分の一般公式によれば

$$\begin{aligned}\nabla_\lambda g_{\mu\nu} &\overset{d}{\equiv} \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} g_{\mu\rho} \\ &= \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\nu,\mu\lambda} - \Gamma_{\mu,\nu\lambda} .\end{aligned}$$

しかし，この最後の数式は（13.8）により，いかなる $g_{\mu\nu}$ に対しても恒等的に0となる．同様に

$$\nabla_\lambda g^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \partial_\lambda g^{\mu\nu} + \Gamma^\mu{}_{\rho\lambda} g^{\rho\nu} + \Gamma^\nu{}_{\rho\lambda} g^{\mu\rho} \equiv 0 . \tag{14.5}$$

（14.5）は（13.6）から導かれる．

上に与えた共変微分の定義は積の微分に対する分配則を満たしていることがわかる．たとえばふたつのベクトル A^μ, B_ν のベクトル積は2階混合テンソルである．したがって（14.3）により

$$\nabla_\lambda (A^\mu B_\nu) = \partial_\lambda (A^\mu B_\nu) + \Gamma^\mu{}_{\rho\lambda} A^\rho B_\nu - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} A^\mu B_\rho$$

となる．しかしこの右辺は

$$= \nabla_\lambda A^\mu \cdot B_\nu + A^\mu \nabla_\lambda B_\nu \tag{14.6}$$

のようにかきかえることができる．これは微分の分配則の成立していることを示すものである．（14.6）の左辺で A, B のスカラー積をとれば，

$$\nabla_\lambda(A^\mu B_\mu) = \partial_\lambda(A^\mu B_\mu). \tag{14.7}$$

そこでスカラーの共変微分は普通の微分に等しいと定義すれば，すべての演算のつじつまがあう．

なお (14.4)，(14.5) ならびに微分の分配則を使うと

$$\nabla_\lambda(A^\mu) = \nabla_\lambda(g^{\mu\nu}A_\nu) = g^{\mu\nu}\nabla_\lambda A_\nu,$$

$$\nabla_\lambda A_\mu = g_{\mu\nu}\nabla_\lambda A^\nu$$

が成り立つ．また

$$\nabla_\lambda(\delta^\mu{}_\nu) = \nabla_\lambda(g^{\mu\rho}g_{\rho\nu}) = 0$$

も成り立つ．

さて Riemann 空間内にひとつの曲線があるとし，その上の任意の点 P の座標が

$$x^\mu = x^\mu(s)$$

という式で与えられているとする．s は座標系に無関係なパラメーターである．たとえば，曲線上のある定点 O を基点とし，O から P までの曲線の長さを s としてもよい．そのときは dx^μ/ds は点 P におけるこの曲線の接線ベクトルとなる．

いま空間内にベクトル場 $A^\mu(x)$ があるとする．上述の曲線にそった A^μ の微分

$$\frac{DA^\mu}{Ds} \overset{d}{\equiv} \lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}[A^\mu\{x(s+\Delta s)\} - A^\mu\{x(s+\Delta s)\}_{/\!/}] \tag{14.8}$$

を A^μ の $x(s)$ にそった**絶対微分**という．この右辺は

$$= \lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}\Big[A^\mu\{x(s+\Delta s)\} - A^\mu\{x(s)\} + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}(x)\frac{dx^\rho}{ds}\Delta s A^\nu\{x(s)\}\Big]$$

$$= \frac{dA^\mu\{x(s)\}}{ds} + \frac{dx^\rho}{ds}\{\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}(x)A^\nu(x)\}_{x=x(s)} \tag{14.8$'$}$$

となる．あるいは

$$\frac{DA^\mu}{Ds} = \frac{dx^\rho}{ds}\left\{\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\rho} + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}(x)A^\nu(x)\right\}_{x=x(s)}$$

$$= \frac{dx^\rho}{ds}\{\nabla_\rho A^\mu(x)\}_{x=x(s)} \tag{14.8)''$$

とかくこともできる．この最後の形をみれば A^μ の絶対微分は，もとと同じタイプのベクトルであることがわかる．

テンソル密度に対する共変微分はつぎのようになる．ここでは例として $\boldsymbol{T}^\mu{}_\nu = \sqrt{-g}\ T^\mu{}_\nu$ の微分を考えてみよう：

$$\begin{aligned}\nabla_\lambda \boldsymbol{T}^\mu{}_\nu &= \nabla_\lambda(\sqrt{-g})\cdot T^\mu{}_\nu + \sqrt{-g}\,\nabla_\lambda T^\mu{}_\nu\\ &= \sqrt{-g}\,\{\partial_\lambda T^\mu{}_\nu + \Gamma^\mu{}_{\tau\lambda}T^\tau{}_\nu - \Gamma^\tau{}_{\nu\lambda}T^\mu{}_\tau\}\\ &= \partial_\lambda \boldsymbol{T}^\mu{}_\nu - \partial_\lambda\sqrt{-g}\cdot T^\mu{}_\nu + \Gamma^\mu{}_{\tau\lambda}\boldsymbol{T}^\tau{}_\nu - \Gamma^\tau{}_{\nu\lambda}\boldsymbol{T}^\mu{}_\tau.\end{aligned}$$

ここで

$$\Gamma^\alpha{}_{\alpha\lambda} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\alpha,\lambda} + g_{\lambda\beta,\alpha} - g_{\alpha\lambda,\beta}) = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\lambda}.$$

一方，(9.7) を使うと

$$\partial_\lambda\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\lambda} = \sqrt{-g}\,\Gamma^\alpha{}_{\alpha\lambda}.$$

そこで

$$\nabla_\lambda \boldsymbol{T}^\mu{}_\nu = \partial_\lambda \boldsymbol{T}^\mu{}_\nu + \Gamma^\mu{}_{\tau\lambda}\boldsymbol{T}^\tau{}_\nu - \Gamma^\tau{}_{\nu\lambda}\boldsymbol{T}^\mu{}_\tau - \Gamma^\alpha{}_{\alpha\lambda}\boldsymbol{T}^\mu{}_\nu. \tag{14.9}$$

テンソル密度の共変微分とテンソルのそれとのちがいは，前者には (14.9) の右辺の最後の項が余分につけ加わるということである．

ここで特に (11.25)~(11.28) をもう一度証明してみよう．まず $\boldsymbol{T}^\mu$ がベクトル密度ならば

$$\nabla_\mu \boldsymbol{T}^\mu = \partial_\mu \boldsymbol{T}^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\mu}\boldsymbol{T}^\nu - \Gamma^\alpha{}_{\alpha\mu}\boldsymbol{T}^\mu = \partial_\mu \boldsymbol{T}^\mu.$$

この左辺はスカラー密度であるから，(11.25) が成立する．

つぎに $\boldsymbol{F}^{\mu\nu}$ を反対称テンソル密度とすれば

$$\nabla_\nu \boldsymbol{F}^{\mu\nu} = \partial_\nu \boldsymbol{F}^{\mu\nu} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\nu}\boldsymbol{F}^{\alpha\nu} + \Gamma^\nu{}_{\alpha\nu}\boldsymbol{F}^{\mu\alpha} - \Gamma^\alpha{}_{\alpha\nu}\boldsymbol{F}^{\mu\nu}.$$

右辺の最後の2項は相殺する．また第2項は，$\Gamma^\mu{}_{\alpha\nu}$ が α, ν について対称，$\boldsymbol{F}^{\alpha\nu}$ は反対称であるから，0 となる．結局

$$\partial_\nu \boldsymbol{F}^{\mu\nu} = \nabla_\nu \boldsymbol{F}^{\mu\nu} = \text{ベクトル密度}.$$

(11.27)，(11.28) の証明は読者にまかせよう．

共変微分の定義を使うとベクトル A_μ, 完全反対称テンソル $A_{\mu\nu}$, $A_{\lambda\mu\nu}$ に対して

$$f_{\mu\nu} \stackrel{d}{\equiv} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\,,$$

$$F_{\lambda\mu\nu} \stackrel{d}{\equiv} \partial_\lambda A_{\mu\nu} + \partial_\mu A_{\nu\lambda} + \partial_\nu A_{\lambda\mu}\,,$$

$$W_{\lambda\mu\nu\rho} \stackrel{d}{\equiv} \partial_\lambda A_{\mu\nu\rho} - \partial_\mu A_{\nu\rho\lambda} + \partial_\nu A_{\rho\lambda\mu} - \partial_\rho A_{\lambda\mu\nu}$$

がいずれも完全反対称テンソルとなることも証明できる．例として一番簡単な $f_{\mu\nu}$ について証明してみよう．

$$\begin{aligned}\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu &= \partial_\mu A_\nu - \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu} A_\alpha - \partial_\nu A_\mu + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} A_\alpha \\ &= f_{\mu\nu} + (\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu}) A_\alpha\,.\end{aligned}$$

$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ が μ, ν について対称なら，右辺は $f_{\mu\nu}$ となる． Γ が対称でなくても右辺の（　）A_α はテンソルである． また左辺はもちろんテンソルであるから，$f_{\mu\nu}$ もテンソルとなる．

§15. 曲　率

普通の微分演算では $f(x,\ y)$ に対して

$$\partial_x \partial_y f - \partial_y \partial_x f \neq 0$$

となるのは $f(x,\ y)$ が特異点をもつ場合にかぎられる．共変微分では微分される量が別に特異点をもたなくても，一般には共変微分の順序を交換すれば，結果も異なる．

いま $A^\mu(x)$ を任意の反変ベクトル場とする．これに対して

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A^\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu A^\lambda$$

を計算してみよう．

$$\begin{aligned}\nabla_\mu(\nabla_\nu A^\lambda) &= \partial_\mu(\nabla_\nu A^\lambda) + \Gamma^\lambda{}_{\tau\mu} \nabla_\nu A^\tau - \Gamma^\tau{}_{\nu\mu} \nabla_\tau A^\lambda \\ &= \partial_\mu(\partial_\nu A^\lambda) + \partial_\mu(\Gamma^\lambda{}_{\rho\nu} A^\rho) + \Gamma^\lambda{}_{\tau\mu} \partial_\nu A^\tau + \Gamma^\lambda{}_{\tau\mu} \Gamma^\tau{}_{\rho\nu} A^\rho \\ &\qquad - \Gamma^\tau{}_{\nu\mu} \nabla_\tau A^\lambda \\ &= (\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu} + \Gamma^\lambda{}_{\tau\mu} \Gamma^\tau{}_{\rho\nu}) A^\rho + (\mu,\ \nu \text{ について対称な項}).\end{aligned}$$

そこで

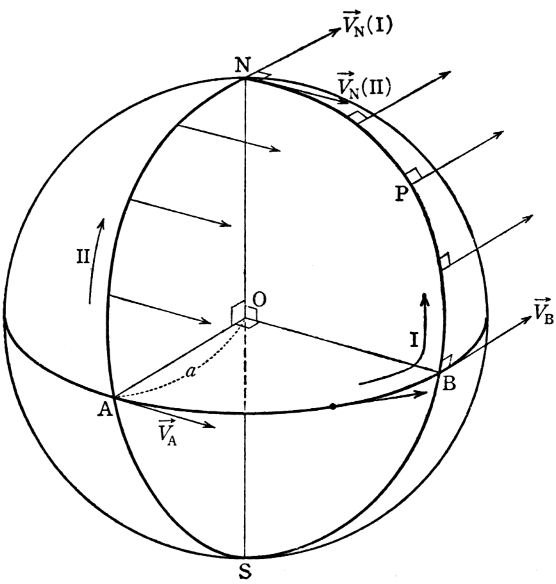
$$
\begin{aligned}
[\nabla_\mu, \nabla_\nu]A^\lambda &\stackrel{d}{\equiv} \nabla_\mu\nabla_\nu A^\lambda - \nabla_\nu\nabla_\mu A^\lambda \\
&= (\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu} + \Gamma^\lambda{}_{\tau\mu}\Gamma^\tau{}_{\rho\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\tau\nu}\Gamma^\tau{}_{\rho\mu})A^\rho \\
&= R^\lambda{}_{\rho\mu\nu}A^\rho \qquad (15.1)
\end{aligned}
$$

となる．ここで

$$
R^\lambda{}_{\rho\mu\nu} \stackrel{d}{\equiv} \partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu} + \Gamma^\lambda{}_{\tau\mu}\Gamma^\tau{}_{\rho\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\tau\nu}\Gamma^\tau{}_{\rho\mu} \qquad (15.2)
$$

を **Riemann-Christoffel の曲率テンソル** という．これが4階テンソルであることは(15.1)の左辺が3階テンソルであることを考えれば容易に納得できよう．これがなぜ曲率テンソルと呼ばれるかについては，まず直観的にわかりやすい話からはじめよう．

いま3次元 Euclid 空間の中に半径 a の球面を考えよう（**第5図**参照）．この赤道面上で直交する2本の半径 OA, OB を考える．また南北極を通り，点 A，ならびに B を通る2本の子午線を考えよう．円弧 NA, AB, BN は大円の一部であり，平面の場合の直線に相当する．点 A において赤道面内にあり円 AB に接するベクトルを $\vec{V}_A$ とする．これを3次元 Euclid 空間のなかのベクトルとは考えず，半径 a の球面という曲った2次元空間に属するベクトルとみなし，これを大円 AB にそって平行移動させたとしよう．さて，直線とはその上の各点における



第 5 図

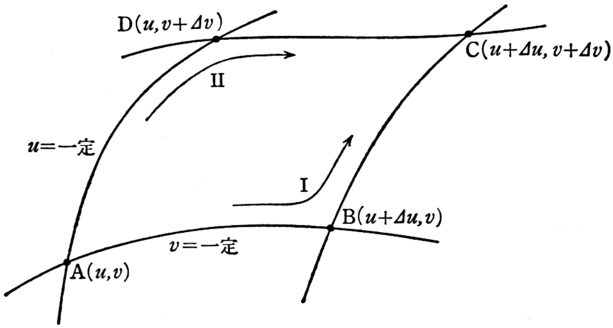
接線が互いに平行な曲線のことである．そこで球面上の大円が，平面上の直線に相当することを考えれば，この曲った球面という世界の中で，一本の大円の各点における接線は互いに平行と考えねばならない．これが球面内のベクトルの平行の定義である．したがって A における接線ベクトル $\vec{V}$ を大円にそって平行移動させながら B まで移したとき，$\vec{V}$ は $\vec{V}_B$ となる．$\vec{V}_B$ とは点 B における大円 AB の接線ベクトルである．これは B における子午線 BN と直交する．つぎに $\vec{V}_B$ を子午線（大円）BN にそって北極 N まで平行移動させたとしよう．ところで§13のおわりに述べたように，2個のベクトルの間の角は両ベクトルを平行に移動させても変わらない．したがって $\vec{V}_B$ が BN 上の途中の点 P まで平行に移されたとき，それは P における子午線の接線と常に直交する．したがって N に達したときのこのベクトルは大円 NA の N における接線ベクトルである．経路 A→B→N をⅠと名づけ，Ⅰを通過して N に達したこのベクトルを $\vec{V}_N$(Ⅰ) とかくことにする．

次にスタートのベクトル $\vec{V}_A$ を大円 AN（これを経路Ⅱとする）にそって N まで平行に移したものを $\vec{V}_N$(Ⅱ) としよう．$\vec{V}_A$ は点 A において子午線 AN と直交する．この角度は平行移動中，変わらないから，$\vec{V}_N$(Ⅱ) は N においても子午線 AN に直交する．したがって同一のベクトル $\vec{V}_A$ を平行に移動させたにもかかわらず，運搬の経路が異なると結果もちがってくる．上の例では $\vec{V}_N$(Ⅰ) と $\vec{V}_N$(Ⅱ) の間の角は $\pi/2$ である．これは，閉曲線 ABNA がとりかこむ球面の面積を a^2 で割った値にほかならない．換言すれば，球面三角形 ABN が中心 O において張る立体角といってもよい．もし $a\to\infty$，つまり，球面の曲率を0とすれば（これは平面にほかならない）立体角は0となり，$\vec{V}_N$(Ⅰ) と $\vec{V}_N$(Ⅱ) のくいちがいは消滅する．経路によって最終点におけるベクトルにちがいがおきるのは，そのベクトルの属する空間が曲っていることに由来する．またくいちがいの大きさはふたつの経路がとりかこむ曲面の面積と曲率半径の逆数（つまり曲率）の2乗に比例する．

この直観的な予備的考察を手本として，これから Riemann 空間内に2個のパラメーター u，v で表わされる曲面を用意しよう．すなわち曲面の方程式は

$$x^\mu = f^\mu(u, v)$$

とする．まず曲面上の1点A［座標を $x(u, v)$ とする］にあるベクトル V^μ を曲面上の $v=$ 一定 という曲線にそって A から $B(u+\Delta u, v)$ まで平行に移動させたとする（**第6図**参照）．つづいて B から $C(u+\Delta u, v+\Delta v)$ まで，



第 6 図

$u+\Delta u=$ 一定 という曲線にそって平行移動させる．経路 A→B→C を I と名づけ，I を通って C に達したベクトルを $V^\mu(C)_{\mathrm{I}}$ と呼ぼう．

つぎに同じベクトル V^μ を別の経路 II(A→D→C)にそって平行移動させ，C に到達したときのベクトルを $V^\mu(C)_{\mathrm{II}}$ と名づける．そこで両ベクトルの差を求めてみよう．ただし $\Delta u, \Delta v$ それぞれについては1次までの近似で計算する．またつぎの記号を使う：

$$x^\mu(B) - x^\mu(A) = \frac{\partial x^\mu}{\partial u}\Delta u \overset{d}{\equiv} \delta_u x^\mu,$$

$$x^\mu(D) - x^\mu(A) = \frac{\partial x^\mu}{\partial v}\Delta v \overset{d}{\equiv} \delta_v x^\mu,$$

$$x^\mu(C) - x^\mu(B) = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial v} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial u \partial v}\Delta u\right)\Delta v,$$

$$x^\mu(C) - x^\mu(D) = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial u} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial v \partial u}\Delta v\right)\Delta u.$$

ところで経路 I と II のちがいは，数式的には u と v のいれかえに相当する．したがって $V^\mu(C)_{\mathrm{I}}$ と $V^\mu(C)_{\mathrm{II}}$ の差を計算するとき u, v の入れ換えに対して対称な量は相殺される．そこで上述の記号でも $\partial^2 x^\mu/\partial u \partial v$ を省略して

$$x^\mu(C) - x^\mu(B) = \delta_v x^\mu, \qquad x^\mu(C) - x^\mu(D) = \delta_u x^\mu$$

として差しつかえない．この記号を使うと

$$V^\mu(C)_{\rm I} = V^\mu(B) - \Gamma^\mu{}_{\tau\rho}(B)\delta_v x^\rho V^\tau(B).$$

この $V^\mu(B)$ に

$$V^\mu(B) = V^\mu(A) - \Gamma^\mu{}_{\tau\rho}(A)\delta_u x^\rho V^\tau(A)$$

を代入し，また

$$\Gamma^\mu{}_{\tau\rho}(B) = \Gamma^\mu{}_{\tau\rho}(A) + \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\tau\rho}(A)\delta_u x^\sigma$$

を使うと

$$V^\mu(C)_{\rm I} = V^\mu(A) - (\partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\tau\rho} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\rho}\Gamma^\alpha{}_{\tau\sigma})V^\tau \delta_u x^\sigma \delta_v x^\rho$$
$$+ (u,\ v \text{ のいれかえについて対称な項})$$

となる．u, v をいれかえれば $V^\mu(C)_{\rm II}$ が求まるから

$$V^\mu(C)_{\rm I} - V^\mu(C)_{\rm II} = \{\partial_\rho \Gamma^\mu{}_{\tau\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\tau\rho} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\rho}\Gamma^\alpha{}_{\tau\sigma} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\sigma}\Gamma^\alpha{}_{\tau\rho}\} V^\tau \delta_u x^\sigma \delta_v x^\rho$$
$$= \frac{1}{2} R^\mu{}_{\tau\lambda\rho} d\sigma^{\lambda\rho} V^\tau, \tag{15.3}$$

ただし

$$d\sigma^{\lambda\rho} = \begin{vmatrix} \delta_v x^\lambda & \delta_v x^\rho \\ \delta_u x^\lambda & \delta_u x^\rho \end{vmatrix}. \tag{15.4}$$

$d\sigma^{\lambda\rho}$ は経路 I とIIがとりかこむ四辺形 ABCD の面積を示す反対称テンソルである． さきに述べた球面上のベクトルの平行移動の結論と比べると $R^\mu{}_{\tau\lambda\rho}$ が 4 次元 Riemann 空間の曲率半径の逆数の 2 乗に該当することがわかる． 以上が曲率テンソルと呼ばれる由来である．

(15.2) に $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ の定義 (13.9)′ を代入すると，添字についてつぎのような対称性があることがわかる．まず

$$R_{\lambda\rho\mu\nu} \overset{d}{\equiv} g_{\lambda\sigma} R^\sigma{}_{\rho\mu\nu} \tag{15.5}$$

とおけば

$$R_{\lambda\rho\mu\nu} \equiv -R_{\lambda\rho\nu\mu}, \tag{15.6 a}$$

$$R_{\lambda\rho\mu\nu} \equiv -R_{\rho\lambda\mu\nu}, \tag{15.6 b}$$

$$R_{\lambda\rho\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu\lambda\rho}. \tag{15.6 c}$$

このほかに

$$R_{\lambda\rho\mu\nu} + R_{\lambda\mu\nu\rho} + R_{\lambda\nu\rho\mu} \equiv 0\,. \tag{15.7}$$

(15.6), (15.7) は $g_{\mu\nu}$ がどんなものであろうとも成立する等式だから恒等式である．これらの関係式のために，4階テンソルであるにもかかわらず，$R_{\lambda\rho\mu\nu}$ の0でない独立な成分の数はわずかに20個である．

関係式 (15.6), (15.7) を証明するのはわけのないことである．これらはいずれもテンソルの等式であるから，ある特別な座標系で成立することが証明できれば，どんな座標系でもそれが成立する．そこでこれから，任意の1点Pにおける局所 Lorentz を用いてこれらを証明しよう．この点では

$$g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu}\,, \qquad g^{\mu\nu}(P) = \eta^{\mu\nu}\,, \qquad (\partial_\lambda g_{\mu\nu})_P = 0$$

であるから $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(P)$ は0となる．しかし $g_{\mu\nu}$ の2階微分は $\neq 0$ であるから Γ の微分は0ではない．そこで点Pでは

$$R_{\lambda\rho\mu\nu}(P) = \frac{1}{2}(g_{\lambda\nu,\rho\mu} - g_{\rho\nu,\lambda\mu} - g_{\lambda\mu,\rho\nu} + g_{\rho\mu,\lambda\nu}) \tag{15.8}$$

となる．これをみれば，(15.6), (15.7) が成立することは一目でわかる．

つぎに $R_{\lambda\rho\mu\nu}$ の独立成分の数を数えてみよう．まず (15.6 a), (15.6 b) のために $R_{\lambda\rho\mu\nu}$ の $\neq 0$ の独立な成分は (λ, ρ) として (0,1), (0,2), (0,3), (2,3), (3,1), (1,2) の6個の添字の組をとった場合である．(μ, ν) についても同じことがいえる．そこで (λ, ρ) という添字の対を，大文字の A で表わし，$A=1$ は $(\lambda, \rho)=(0,1)$ を示し，$A=2$ は $(\lambda, \rho)=(0,2)$ を，…，最後に $A=6$ は $(\lambda, \rho)=(1,2)$ の場合を表わすものと約束する．全く同様に (μ, ν) という対を B で表わすと

$$R_{\lambda\rho\mu\nu} \to R_{AB} \qquad (A, B = 1, 2, \cdots, 6)$$

のようにかきかえられる．したがって $R_{\lambda\rho\mu\nu}$ の $\neq 0$ の独立な成分だけをあつめると 6×6 行列 R_{AB} となる．しかもこの行列は (15.6 c) により

$$R_{AB} = R_{BA}$$

である．したがってこの独立な要素は $6(6+1)/2 = 21$ 個である．しかし実はこれらの成分の間にはさらに (15.7) という関係がある．そこで (15.7) が何個の独立な関係式を与えるかを数えてみよう．

(15.7) の左辺を $F_{\lambda\rho\mu\nu}$ で表わせば，$F_{\lambda\rho\mu\nu}$ はこの添字の置換に対して完全反対称である．この性質は (15.6) を使えば容易に確かめられる．したがって F の 0 でない独立な成分はただの 1 個である．そこで結局 $R_{\lambda\rho\mu\nu}$ の 0 でない独立成分の数は $21-1=20$ となる．

さて，$R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu}$ はその名前の示すように，空間が曲っているか否かの判定に役立つ．Euclid 空間でも曲線座標系を用いれば $g_{\mu\nu}(x)$ は定数の $\eta_{\mu\nu}$ とは異なる．もちろん 2 次元球面のように曲った空間の $g_{\mu\nu}$ は $\eta_{\mu\nu}$ と一致しない．しかし，適当な座標系をとれば，任意の 1 点で，そこの $g_{\mu\nu}$ の値を $\eta_{\mu\nu}$ に一致させることは，いかなる Riemann 空間でも必ず可能である．いやそればかりでなく，既に説明したように，その点における測地系を採れば，$g_{\mu\nu}$ の 1 階微分さえも 0 にすることが可能である．したがって $g_{\mu\nu}-\eta_{\mu\nu}$ や，$\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}$ がある点で 0 となるか否かは空間が曲っているか否かの判定には役立たない．この判定についてはつぎの定理がある．

定理 7. 空間内のある部分域 Ω のなかが Minkowski 的(あるいは擬 Euclid 的) であるための必要十分条件は Ω 内のいたる所で $R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu}$ のすべての成分が 0 となることである．

なお，空間が Minkowski 的な場合に，空間は**平坦** (flat) であるとよばれる．また曲率テンソルが 0 でないとき，空間は曲っているという．

[証 明] 必要であることは容易にわかる．なぜならば Ω は Minkowski 的であるから，Ω のなかのすべての点で計量テンソルが $\eta_{\mu\nu}$ となるような座標系を設ければよい．このときは Γ は Ω 内のいたるところで 0 となり，したがって $R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu}$ も 0．

十分であることの証明：　いま逆に $R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu}$ が Ω の中のすべての点で 0 とする．そこで Ω のなかでつぎの式を満足する 4 個の共変ベクトル場 $h^{(a)}{}_{\mu}(x)$ を考えよう．

$$\frac{\partial h^{(a)}{}_{\mu}}{\partial x^{\nu}}=\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}h^{(a)}{}_{\lambda}. \tag{15.9}$$

ここで (a) は 4 個のベクトルを識別するための番号で，$a=0, 1, 2, 3$ とする．

さて (15.9) は幸せなことに Ω のなかで解をもつ．なぜならばそれは積分可能の条件を満足しているからである．すなわち

$$\frac{\partial^2 h^{(a)}{}_\mu}{\partial x^\rho \partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\rho}(\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} h^{(a)}{}_\lambda).$$

この右辺に (15.9) を代入すると

$$= \frac{\partial \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} h^{(a)}{}_\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \Gamma^\tau{}_{\lambda\rho} h^{(a)}{}_\tau .$$

そこで

$$\frac{\partial^2 h^{(a)}{}_\mu}{\partial x^\rho \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h^{(a)}{}_\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho} = R^\tau{}_{\mu\rho\nu} h^{(a)}{}_\tau .$$

これは仮定により Ω の中のいたるところで 0 となる．したがって (15.9) は積分可能であるから，逐次近似法を用いて解けばよい．

このようにして求まる $h^{(a)}{}_\mu$ に対して特につぎの条件をつける：

$$h^{(a)}{}_\mu h^{(b)}{}_\nu g^{\mu\nu} = \eta^{ab} . \tag{15.10}$$

条件 (15.10) が方程式 (15.9) と両立することは，(15.9) を

$$\nabla_\nu h^{(a)}{}_\mu = 0 \tag{15.9$'$}$$

の形にかけば容易にわかる．条件 (15.10) は各 (a, b) ごとにそれぞれスカラーの関係式である．この両辺に ∇_λ を掛ければ右辺は定数であるから 0，左辺も (15.9)′ により 0．したがって (15.10) は (15.9)′ と両立する．

そこで (15.10) を満たす (15.9) の解が求まったとする．それは (15.9) から

$$\frac{\partial h^{(a)}{}_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial h^{(a)}{}_\nu}{\partial x^\mu} \tag{15.11}$$

を満足する．これは (15.9) の右辺が μ, ν について対称であるからである．(15.11) は

$$h^{(a)}{}_\mu = \partial_\mu \phi^{(a)} \tag{15.12}$$

という 4 個のスカラー $\phi^{(a)}$ が存在することを示している．そこでいま Ω 内の新しい座標系 X^a ($a = 0, 1, \cdots, 3$) を

$$X^a = \phi^{(a)}(x^0, \cdots, x^3)$$

により定義する．これを使うと距離の定義は

$$ds^2 = \bar{g}_{ab}(X)dX^a dX^b$$

である．ここでテンソルの変換則から

$$\bar{g}_{ab}(X) = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^a}\frac{\partial x^\nu}{\partial X^b}g_{\mu\nu}(x).$$

同様に $\bar{g}^{ab}(X)$ は

$$\bar{g}^{ab}(X) = \frac{\partial X^a}{\partial x^\mu}\frac{\partial X^b}{\partial x^\nu}g^{\mu\nu}(x)$$

$$= h^{(a)}{}_\mu h^{(b)}{}_\nu g^{\mu\nu}.$$

ところが，この右辺は条件 (15.10) により Ω のなかのいたる所で

$$\bar{g}^{ab} = \eta^{ab}.$$

したがって

$$\bar{g}_{ab}(X) = \eta_{ab}$$

も Ω のなかのすべての点で成立する．つまり X-系は Lorentz 座標系であり，Ω は Minkowski 空間である． なお $R^\lambda{}_{\rho\mu\nu}$ はテンソルであるから，これが 0 であるか否かということは座標系の選択に関係のない不変な性質である．

$R^\lambda{}_{\rho\mu\nu}$ から縮約により 2 階テンソル， さらにスカラーを導くことができる．すなわち

$$R_{\mu\nu} \stackrel{d}{\equiv} R^\lambda{}_{\mu\nu\lambda} = \partial_\nu\Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda} - \partial_\lambda\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + \Gamma^\tau{}_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\tau} - \Gamma^\lambda{}_{\tau\lambda}\Gamma^\tau{}_{\mu\nu}$$

$$= R_{\nu\mu}. \tag{15.13}$$

これが μ, ν について対称なことはすぐにわかる． まず右辺の第 1 項以外はすべて (μ, ν) について対称である．第 1 項は

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\mu g_{\alpha\beta} = \partial_\mu \log\sqrt{-g} \tag{15.14}$$

という関係を使えば， それもまた μ, ν について対称である． $R_{\mu\nu}$ を **Ricci のテンソル**という．

$R_{\mu\nu}$ から**スカラー曲率**

$$R \stackrel{d}{\equiv} g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{15.15}$$

が導かれる．

さて $R_{\lambda\rho\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$, R の特別な1次式

$$W_{\lambda\rho\mu\nu} \overset{d}{\equiv} R_{\lambda\rho\mu\nu} + \frac{1}{2}(R_{\lambda\mu}g_{\rho\nu} - R_{\lambda\nu}g_{\rho\mu} - R_{\rho\mu}g_{\lambda\nu} + R_{\rho\nu}g_{\lambda\mu})$$
$$- \frac{1}{6}(g_{\lambda\mu}g_{\rho\nu} - g_{\lambda\nu}g_{\rho\mu})R \qquad (15.16)$$

は添字について $R_{\lambda\rho\mu\nu}$ と全く同じ対称性をもつ．さらに

$$W^{\lambda}{}_{\rho\mu\lambda} = 0. \qquad (15.17)$$

一般に $R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu}$ と同じ対称性をもつ4階テンソルで，その上つき添字と3個の下側添字のうちのどのひとつと縮約してもすべて0となるようなテンソル（上に述べた W はその一例）を **Weyl のテンソル** という（§52参照）．

$R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu}$ は (15.7) のほかに，さらに重要な恒等式を満足する．それは **Bianchi の恒等式** とよばれるもので

$$\nabla_{\lambda}R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} + \nabla_{\mu}R^{\alpha}{}_{\beta\nu\lambda} + \nabla_{\nu}R^{\alpha}{}_{\beta\lambda\mu} \equiv 0 \qquad (15.18)$$

である．

［証 明］ まず任意のベクトル A^{α} についてつぎの量を計算する：

$$\nabla_{\lambda}([\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]A^{\alpha}) = \nabla_{\lambda}(R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}A^{\beta})$$
$$= \nabla_{\lambda}R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\cdot A^{\beta} + R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\nabla_{\lambda}A^{\beta}.$$

演算の順序を逆にすると，少し面倒な計算ではあるが

$$[\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}]\nabla_{\lambda}A^{\alpha} = R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\nabla_{\lambda}A^{\beta} - R^{\sigma}{}_{\lambda\mu\nu}\nabla_{\sigma}A^{\alpha}$$

となる．両者の差は

$$[\nabla_{\lambda}, [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]]A^{\alpha} \overset{d}{\equiv} \nabla_{\lambda}([\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]A^{\alpha}) - [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]\nabla_{\lambda}A^{\alpha}$$
$$= \nabla_{\lambda}R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\cdot A^{\beta} + R^{\sigma}{}_{\lambda\mu\nu}\nabla_{\sigma}A^{\alpha}, \qquad (15.19\,\mathrm{a})$$

(λ, μ, ν) を輪換させると

$$[\nabla_{\mu}, [\nabla_{\nu}, \nabla_{\lambda}]]A^{\alpha} = \nabla_{\mu}R^{\alpha}{}_{\beta\nu\lambda}A^{\beta} + R^{\sigma}{}_{\mu\nu\lambda}\nabla_{\sigma}A^{\alpha}, \qquad (15.19\,\mathrm{b})$$

$$[\nabla_{\nu}, [\nabla_{\lambda}, \nabla_{\mu}]]A^{\alpha} = \nabla_{\nu}R^{\alpha}{}_{\beta\lambda\mu}A^{\beta} + R^{\sigma}{}_{\nu\lambda\mu}\nabla_{\sigma}A^{\alpha}. \qquad (15.19\,\mathrm{c})$$

(15.19 a)～(15.19 c) を加えると左辺は Jacobi の恒等式により0となる（$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]$ の代りに $\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu}$ のように展開すれば互いに相殺して，A^{α} がなんであろうとも左辺は恒等的に0となる）．したがって

$$(\nabla_\lambda R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} + \nabla_\mu R^\alpha{}_{\beta\nu\lambda} + \nabla_\nu R^\alpha{}_{\beta\lambda\mu})\cdot A^\beta$$
$$+ (R^\sigma{}_{\lambda\mu\nu} + R^\sigma{}_{\mu\nu\lambda} + R^\sigma{}_{\nu\lambda\mu})\nabla_\sigma A^\alpha \equiv 0. \qquad (15.20)$$

ところで A^α は全く任意のベクトルであるから，A^β と $\nabla_\sigma A^\alpha$ とは全く独立と考えてよい．したがって (15.20) の両項の（　　）はそれぞれ恒等的に 0 となる．この第 1 項は上に述べた Bianchi の恒等式 (15.18) であり，第 2 項は (15.7) にほかならない．

(15.18) に $g^{\lambda\beta}$ を掛け，さらに α と ν を縮約すると (15.13), (15.15) により

$$2\nabla_\lambda\left(R^\lambda{}_\mu - \frac{1}{2}\delta^\lambda{}_\mu R\right) \equiv 0$$

となる．あるいは

$$G^\lambda{}_\mu \overset{d}{\equiv} R^\lambda{}_\mu - \frac{1}{2}\delta^\lambda{}_\mu R \qquad (15.21)$$

とおけば

$$\nabla_\lambda G^\lambda{}_\mu \equiv 0. \qquad (15.22)$$

$G^\lambda{}_\mu$ は **Einstein の曲率テンソル** とよばれる．(15.22) は一般相対論で非常に重要な役割をする恒等式である．

最後に重要な定理を 2 つ述べる．

定理 8. $g_{\mu\nu}$ およびその 1 階，2 階の微係数だけからできているスカラーで，2 階微係数については 1 次式とする（その係数には $g_{\mu\nu}$ や，$g^{\mu\nu}$ あるいはその 1 階微分が含まれる）．このようなスカラーの最も一般なものは

$$aR + c \qquad (a,\ c \text{ は任意の定数})$$

である．

定理 9. $g_{\mu\nu}$ およびその 1 階，2 階の微係数だけからできている 2 階対称反変テンソルで，$g_{\mu\nu}$ の 2 階微係数については 1 次式とする．いまこのテンソルを $T^{\mu\nu}$ とするとき，これが恒等式

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} \equiv 0$$

を満足するならば，それは必ず

$$T^{\mu\nu} = aG^{\mu\nu} + bg^{\mu\nu} \qquad (a,\ b \text{ は任意の定数})$$

という形に表わされる．

ここでは定理8の証明について述べる．定理9の証明は読者にまかせよう．

［定理8の証明］ Riemann 空間内の1点 P において P を原点とする局所 Lorentz 系を x－系とする．したがって P では

$$g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu}, \qquad g^{\mu\nu}(P) = \eta^{\mu\nu}, \qquad \partial_\lambda g_{\mu\nu}(P) = 0$$

である．それゆえ求めるスカラーを S とすれば，仮定により

$$S(P) = \left(\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right)_P \{a\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} + b(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha})\} + c \quad (15.23)$$

となる．$a,\ b,\ c$ は未定の定数である．

ここで座標変換 $x \to x'$ を考えよう．いま x' として

$$x^{\mu\prime} = x^\mu + \frac{1}{3!} C^\mu{}_{abc} x^a x^b x^c \quad (15.24)$$

とする．$C^\mu{}_{abc}$ は任意の定数の係数で，添字 $a,\ b,\ c$ について対称とする．原点 P の近くでは $x' \approx 0$ であるから，(15.24) を x について解いたとき

$$x^\mu = x^{\mu\prime} - \frac{1}{3!} C^\mu{}_{abc} x^{a\prime} x^{b\prime} x^{c\prime} + 0\{(x')^4\} \quad (15.24)'$$

となる．ところで点 P ($x = 0,\ x' = 0$) においては

$$\left.\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu\prime}}\right)_P = \delta^\alpha{}_\mu, \qquad \left.\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\mu\prime}\partial x^{\nu\prime}}\right)_P = 0, \qquad \left.\frac{\partial^3 x^\alpha}{\partial x^{\lambda\prime}\partial x^{\mu\prime}\partial x^{\nu\prime}}\right)_P = -C^\alpha{}_{\lambda\mu\nu}$$

である．したがって x'－系でも

$$g_{\mu\nu}'(P) = \eta_{\mu\nu}, \qquad \left.\frac{\partial g_{\mu\nu}'}{\partial x^{\lambda\prime}}\right)_P = 0.$$

しかし $g_{\mu\nu}$ の2階微分については

$$\left.\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right)_P = \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\left\{\frac{\partial x^{\rho\prime}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^{\sigma\prime}}{\partial x_\nu} g_{\rho\sigma}'(x')\right\}_P$$

$$= \left.\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}'(x')}{\partial x^{\alpha\prime}\partial x^{\beta\prime}}\right)_P + C_{\mu,\nu\alpha\beta} + C_{\nu,\mu\alpha\beta}$$

となる．ここで

$$C_{\mu,\nu\alpha\beta} \overset{d}{\equiv} \eta_{\mu\rho} C^\rho{}_{\nu\alpha\beta}\,.$$

そこで x'-系の量で S をかき表わすと

$$S(P) = \{S'(x')\}_P + (C_{\mu,\nu\alpha\beta} + C_{\nu,\mu\alpha\beta})\{a\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} + b(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha})\}$$
$$= \{S'(x')\}_P + 2(a+2b)C^{\mu}{}_{\mu\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta}. \tag{15.25}$$

ここで S' とは

$$\{S'(x')\}_P \overset{d}{\equiv} \left(\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}'(x')}{\partial x^{\alpha\prime}\partial x^{\beta\prime}}\right)_P \{a\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} + b(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha})\} + c$$

である．S がスカラーであるためには，(15.25) の S' 以外の項は 0 とならねばならない．そこで

$$b = -\frac{1}{2}a \qquad (a \text{ は任意の定数})$$

となる．したがって

$$S(P) = a\left\{\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha})\right\}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right)_P + c. \tag{15.26}$$

一方，P における局所 Lorentz 系を用いるとスカラー曲率 R は

$$R = \left\{\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha})\right\}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right)_P$$

となる．したがって局所 Lorentz 系を用いると，点 P で

$$S(P) = aR(P) + c. \tag{15.27}$$

(15.27) の両辺はともにスカラーである．したがってこの等式はどんな座標系でも成立する．

第3章　一般相対論的力学および電磁気学

§16. 質点の運動方程式

この章では重力場のポテンシャル $g_{\mu\nu}$ が与えられているとき，重力の影響のもとに在る質点の運動の法則や電磁場の方程式がどのようになるかについて述べる．

いま質量 m の質点の位置を $x^\mu(\tau)$ とする．τ は質点の固有時である．質点には重力以外の外力はなにも作用していないとする．いまある瞬間，質点の存在する世界点において特に局所 Lorentz 系を設けたとしよう．質点の位置を $X^\mu(\tau)$ とすれば，τ の定義から

$$-c^2 d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu.$$

ここで時刻 $\tau + d\tau$ における質点の位置を $X^\mu(\tau + d\tau) = X^\mu(\tau) + dX^\mu$ とした．さて，局所 Lorentz 系からみれば，特殊相対論的力学の法則が成立し，そこでは重力はもちろんのこと，仮定により他の外力も一切存在しないから，質点の運動方程式は

$$m \frac{d^2 X^\mu(\tau)}{d\tau^2} = 0 \tag{16.1}$$

である．これを一般の x-系からみれば

$$0 = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right) = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu}\frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\nu}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}. \tag{16.1$'$}$$

両辺に $\partial x^\rho / \partial X^\mu$ を掛けると

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\rho}{\partial X^\mu}\frac{\partial^2 X^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\nu}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \tag{16.2}$$

ところで Γ の変換則 (13.4) において x'-系をこの節の一般の座標系（x-系）に，また (13.4) の x-系を局所 Lorentz 系 X-系によみかえれば，(13.4) の右辺の Γ は 0 となる（これは局所 Lorentz 系からみたアフィン係

数となるからである）．したがって（13.4）は

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x)=\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial X^{\sigma}}\frac{\partial^2 X^{\sigma}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} \tag{13.4$'$}$$

となる．これを使うと（16.2）は

$$\frac{d^2x^{\rho}}{d\tau^2}+\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}\frac{dx^{\lambda}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}=0. \tag{16.3}$$

これが一般座標系からみた**質点の運動方程式**である．

（16.3）の左辺が反変ベクトルの変換性をもつことは Γ の変換則を使って直接に証明できる．しかし（16.3）を導いた途中の計算を逆にたどればもっと容易にわかる．すなわち（16.1)$'$ からわかるように

$$\frac{\partial x^{\rho}}{\partial X^{\mu}}\frac{d^2X^{\mu}}{d\tau^2}=\frac{d^2x^{\rho}}{d\tau^2}+\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}\frac{dx^{\lambda}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}.$$

この左辺は $x\to x'$ という変換に対して反変ベクトルである．したがって右辺も同じ変換則にしたがう．あるいは（14.8)$'$ で，曲線 $x^{\mu}(s)$ にそって定義されたベクトル $A^{\mu}(s)$ として特に接線ベクトル dx^{μ}/ds を考え，不変パラメーター s の代りに固有時 τ を使えば，（14.8)$'$ は

$$\frac{D}{D\tau}\left(\frac{dx^{\mu}(\tau)}{d\tau}\right)=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\right)+\frac{dx^{\rho}}{d\tau}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}.$$

となる．そこで，質点の運動方程式は（$dx/d\tau$ を $\dot{x}$ とかけば）

$$\frac{D\dot{x}^{\mu}}{D\tau}=0 \tag{16.4}$$

とかいてもよい．これをみれば左辺が反変ベクトルであることは一目瞭然である．なお絶対微分の定義を思い起こすと（16.4）は

$$\Delta\tau\frac{D\dot{x}^{\mu}}{D\tau}=\dot{x}^{\mu}(\tau+\Delta\tau)-\dot{x}^{\mu}(\tau+\Delta\tau)_{/\!/}=0$$

のようにかきかえられる．これは，質点の描く世界線の点 $x^{\mu}(\tau)$ における接線ベクトルを点 $x^{\mu}(\tau+\Delta\tau)$ まで平行移動させたとき，それがその点における世界線の接線ベクトルに等しいことを示す．つまり質点の世界線上の各点における接線ベクトルはすべて互いに平行である．このような性質をもつ曲線は幾何学では**測地線**とよばれる．換言すれば重力の影響下にある質点の世界線は

測地線であるということになる．

測地線とは，ここに述べた定義からわかるように，Euclid 空間における直線の定義を一般化したものである．したがって (16.2) はつぎのように変分法を用いて導くこともできる．

いま，時空内の2点 A, B を結ぶ任意の曲線をパラメーター λ を使って $x^\mu(\lambda)$ という関数で表わすと，A から B までのこの曲線の長さは（ただし曲線は時間的曲線と仮定する．すなわち，その上のどの点における接線ベクトルもすべて時間的ベクトルとする）

$$I=\int_{s_A}^{s_B}ds=\int_{\lambda_A}^{\lambda_B}\sqrt{-g_{\mu\nu}\{x(\lambda)\}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}\,d\lambda \tag{16.5}$$

で与えられる．いま，λ の関数 $x^\mu(\lambda)$ を上手に選んで I が極値をもつようにしよう．それには Euler の方程式

$$\frac{\delta\sqrt{\ }}{\delta x^\mu}\overset{d}{\equiv}\frac{\partial\sqrt{\ }}{\partial x^\mu}-\frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{\partial\sqrt{\ }}{\partial\left(\dfrac{dx^\mu}{d\lambda}\right)}\right\}=0$$

を満足するように $x^\mu(\lambda)$ をとればよい．ここで $\sqrt{\ }$ とは I の被積分関数を表わす．Euler の方程式は具体的にかくと

$$\frac{-1}{2\sqrt{\ }}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda}-\frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{-g_{\mu\nu}\dfrac{dx^\nu}{d\lambda}}{\sqrt{\ }}\right\}=0.$$

ところで I はパラメーター λ を，任意の新しいパラメーター $\lambda'=f(\lambda)$ にかえても

$$\sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}\,d\lambda=\sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda'}\frac{dx^\nu}{d\lambda'}}\,d\lambda'$$

のように形が変わらない．そこで，これから λ として特に

$$-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}=1 \tag{16.6}$$

を満足するパラメーター s（これは曲線の長さそのものである）をとれば，$\sqrt{\ }$ はすべて1となるから

$$-\frac{1}{2}\partial_\mu g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta+\frac{d}{ds}(g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu)=0$$

となる．ここで $\dot{x}$ は dx/ds を示す．第2項の微分を実行すると

$$g_{\mu\nu}\ddot{x}^{\nu}+\partial_{\alpha}g_{\mu\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}-\frac{1}{2}\partial_{\mu}g_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}=0,$$

あるいは

$$\frac{d^2x^{\lambda}}{ds^2}+\frac{1}{2}g^{\lambda\mu}(g_{\mu\alpha,\beta}+g_{\mu\beta,\alpha}-g_{\alpha\beta,\mu})\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds}=0. \qquad (16.3)'$$

これはまさに（16.3）にほかならない．

パラメーター s が（16.6）という条件を満たすときは I として（16.5）の代りに

$$I=-\int_{s_A}^{s_B}g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}ds \qquad (16.7)$$

としてもよい．これを x^{μ} について変分すれば再び（16.3)′ が導かれる．

測地線の方程式（16.3)′ に用いられたパラメーター s は（16.3）のパラメーター τ（質点の固有時）と

$$s=c\tau+\text{const} \qquad (16.8)$$

という関係にある．（16.8）のようなパラメーターの変更に対しては測地線の方程式は常に（16.3）の形をしている．しかし一般の変換

$$s\to s'=f(s)$$

に対しては測地線の方程式は

$$\frac{d^2x^{\lambda}}{ds'^2}+\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{ds'}\frac{dx^{\beta}}{ds'}=-\frac{dx^{\lambda}}{ds'}\frac{d^2s'}{ds^2}\Big/\left(\frac{ds'}{ds}\right)^2 \qquad (16.9)$$

となる．この結果からもわかるように $s'=as+b$(a, b は任意の定数）のときにかぎって，変換 $s\to s'$ に対して方程式（16.3）あるいは（16.3)′ の形が不変に保たれる．

いままで述べたことは質点の世界線に関する話である．特殊相対論では質点の4元速度 $dX^{\mu}/d\tau$ は時間的ベクトルである．すなわち

$$-c^2=\eta_{\mu\nu}\frac{dX^{\mu}}{d\tau}\frac{dX^{\nu}}{d\tau}=g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}.$$

そこでいままでの話では，$dx^{\mu}/d\tau$ を時間的ベクトルに制限した．

一方，光線の場合にはその世界線の接線ベクトルは，特殊相対論によれば

ヌル・ベクトルである．したがって一般相対論でも，質点の場合と同様の推論により，光線の線素 dx^μ はヌル・ベクトルとなる．それゆえ（16.6）を満足するようなパラメーター s を採用するわけにはいかない．しかし光線の進路上の1点で局所 Lorentz 系（X－系）を設ければ，光線の方程式を $X^\mu = X^\mu(\lambda)$ とするとき

$$\frac{d^2X^\mu}{d\lambda^2} = 0, \qquad \eta_{\mu\nu}\frac{dX^\mu}{d\lambda}\frac{dX^\nu}{d\lambda} = 0$$

が成立する．ここで λ は座標変換に対して不変なパラメーターで，光の進路を一意的に表わすことのできるパラメーターならなんでもよい．上の2つの式を一般座標系からみれば

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \tag{16.10}$$

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \tag{16.11}$$

となる．つまり光の世界線は長さが0の測地線である．なお，条件（16.11）あるいは（16.6）が測地線上のどの点でも成り立つこと，つまり（16.11）と（16.10）が両立すること，および（16.6）と（16.3）′とが両立しうることは容易に証明できる．

§17.　Newton の運動方程式との比較，永久重力場

これから一般相対論における質点の運動方程式（16.3）の物理的意味を理解するために，これと Newton の運動方程式を比較してみよう．特に以下に述べるような特別な場合には（16.3）が近似的に Newton のそれと一致することを示そう．

まずつぎの4個の仮定をおく．

（a）　座標系を上手に選んだために，質点の近傍では

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \tag{17.1}$$
$$|h_{\mu\nu}(x)| \ll 1$$

とする．

（b） $h_{\mu\nu}$ は x^0 には無関係とする．このような重力場を**定常的な重力場**という．

（c） $g_{0k}=0\,(k=1,2,3)$ とする．仮定（b）だけでなく，さらにこの条件も満たす重力場を**静的重力場**という．

（d） 質点の速度を $\vec{v}=d\vec{x}/dt$ とするとき，$(v/c)^2\ll 1$ とする．また $|h_{\mu\nu}|$ と $(v/c)^2$ とは大体同じ程度の小さな量とする．

これから $|h_{\mu\nu}|$ の1次まで，また $(v/c)^2$ までの近似で（16.3）をかきかえてみよう．まず，Γ は $|h|$ の1次までの近似では

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}(h_{\rho\mu,\nu}+h_{\nu\rho,\mu}-h_{\mu\nu,\rho}).$$

したがって $k=1,2,3$ とするとき，方程式

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2}+\Gamma^k{}_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2+\sum_{l=1}^{3}2\Gamma^k{}_{0l}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau}+\sum_{m,n=1}^{3}\Gamma^k{}_{mn}\frac{dx^m}{d\tau}\frac{dx^n}{d\tau}=0$$

において第3，第4項はそれぞれ hv/c, $h(v/c)^2$ の程度の量だから無視してよい．また，固有時 τ はこの近似では

$$\begin{aligned}cd\tau&=\sqrt{-\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu-h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}\\&=cdt\sqrt{1-(v/c)^2-h_{00}}\,.\end{aligned}\tag{17.2}$$

したがって第2項の分母の $d\tau$ は，近似的に dt にすりかえてよい．なおこの式から $d^2x^k/d\tau^2$ は $|h|$ の程度の量である．したがってこの分母の $d\tau$ も dt におきかえてよい．結局，運動方程式は

$$\frac{d^2x^k}{dt^2}+c^2\Gamma^k{}_{00}=0$$

となる．ところで，仮定（b),（c）により

$$\Gamma^k{}_{00}=-\frac{1}{2}\partial_k h_{00}\tag{17.3}$$

であるから

$$\frac{d^2x^k}{dt^2}=\frac{c^2}{2}\partial_k h_{00}\,.\tag{17.4}$$

一方，Newton の理論では重力ポテンシャル $\varphi(\vec{x})$ の中を運動している質点

の方程式は

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} = -\partial_k\varphi. \tag{17.5}$$

(17.4), (17.5) を比べるとき，もし

$$h_{00} = -\frac{2}{c^2}\varphi \tag{17.6}$$

とおけば Einstein の運動方程式は Newton のそれと一致することがわかる．

(17.6) によれば g_{00} は Newton のポテンシャルの1次式である．これを拡張して $g_{\mu\nu}$ を重力ポテンシャルと名づけたことは当を得ている．また，それの1階微分で表わされる Γ は重力そのものに該当する．$\Gamma=0$ は重力が0ということである．したがって§13に述べた“点Pにおける測地系”とは，物理的にいえば，その座標系を基準にしたとき，Pの近傍が無重力地帯となるような座標系のことである．したがって§13で新たに定義した局所 Lorentz 系は，第1章で与えた“局部的に重力が消滅したようにみえる座標系”という物理的な定義と同じであることがわかる．なお Γ に対する上述の解釈に従えば，等価原理は，それを幾何学的にいえば，“時空内のいかなる点でも，その点において測地的な座標系を設けることが必ずできる”という主張にほかならない．座標系のとりかたにより重力自身を局部的に消滅させたり，あるいは出現させたり自由にできるということは，重力がテンソルでない証拠である．もしテンソル量ならば，座標系をどうとろうとも，それを0にさせることは不可能であるからである．

話をもとにもどして，運動方程式 (16.3) の第0成分は，いままでの話と同じ程度の近似では

$$\frac{d^2x^0}{d\tau^2} + \sum_{k=1}^{3} 2\Gamma^0{}_{0k}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau} = 0 \tag{17.7}$$

となる．ここで $\Gamma^0{}_{0k}$ は

$$\Gamma^0{}_{0k} = -\frac{1}{2}\partial_k h_{00} = \frac{1}{c^2}\partial_k\varphi. \tag{17.8}$$

そこで (17.7) の第2項の $dx^0/d\tau$ は $dx^0/dt=c$ におきかえてよい．した

がって

$$\frac{d^2x^0}{d\tau^2}+\sum_{k=1}^{3}\frac{2}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\frac{dx^k}{d\tau}=\frac{d}{d\tau}\left\{\frac{dx^0}{d\tau}+\frac{2}{c}\varphi\right\}=0. \qquad (17.7)'$$

ここで $d\tau$ の定義 (17.2) を使うと

$$\frac{dx^0}{d\tau}=c\left\{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2-h_{00}\right\}^{-1/2}\approx c\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2-\frac{1}{c^2}\varphi\right\}.$$

したがって (17.7)′ は,

$$\frac{d}{d\tau}\left\{c+\frac{1}{2c}v^2+\frac{\varphi}{c}\right\}=0,$$

あるいは mc を掛けると

$$mc^2+\frac{1}{2}mv^2+m\varphi=E=\text{一定}. \qquad (17.9)$$

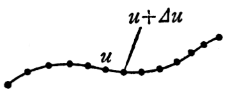
E は重力場（そのポテンシャルが φ）のなかを速度 $\vec{v}=d\vec{x}/dt$ で走っている質量 m の質点のもつ力学的全エネルギーを表わす．(17.9) はエネルギーの保存則にほかならない．

上に述べたように重力 Γ は座標系のとりかたにより，これを消去することもできるし，またたとえ時空が平坦でも見かけの重力を作りだすこともできる．したがって質点の運動方程式のなかに Γ 項があるか否かで，本物の重力場があるか否かを判断するわけにはいかない．ここで本物の重力場とは，時空の曲率が 0 でない場合をいう．これに対して見かけの重力場とは，平坦な時空のなかに曲線座標系を設けることにより $\Gamma \neq 0$ となる場合をさす．これはいわば，Minkowski 時空のなかで，加速系を基準にした場合に該当する．これは前者と本質的に区別できる．前者は**永久重力場**とよばれ，曲率テンソルが 0 でないか否かで，後者と判別できる．

さて曲率テンソルは Γ の微分を含む．したがって大ざっぱないいかたをすれば，重力自身が一様でないときは曲率テンソルも一般に $\neq 0$ となる．たとえば，地上で 1 個のりんごが一定の加速度をもって自由落下するのを目撃しても，ただそれだけから重力の存在を主張するのは早計である．本物の重力の存在を証明するには，重力が空間的，あるいは時間的に一様でないことを確かめ

る必要がある．それには，大きさが0の質点の自由落下運動をしらべても役に立たない．* いま，質点の代りに有限のひろがりをもった物体を自由落下させるとき，もし本物の重力場が存在すれば，その物体内の点ごとに，そこに作用する重力がわずかずつ異なるはずである．たとえば，地球のうみだした重力（これは本物！）の場合には，地表に近いほど重力は大きい．したがって物体の中で，地表に近い点は強い引力をうけ，地表から最も離れた点では引力も弱いから，物体の中心に腰をすえた人がみれば物体は上下に引き伸ばされるように見える．これはまさに潮汐力にほかならない．

以上の考えを数式で表わすために，上述の物体の代りに，質点を伸び縮み自由な糸で数珠（じゅず）つなぎにしたものを重力場のなかで自由落下させたとしよう（**第7図**参照）．いま，数珠の一端から，数珠の途中にある質点までの糸の長さを u とすれば，質点の座標 x^μ は u と，その固有時 τ を用いて，



第 7 図

$$x^\mu = x^\mu(u, \tau)$$

で表わされる．各質点は運動方程式（16.3）に従うから

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \tag{17.10}$$

いま，隣り合った質点間の座標差を示すベクトルを

$$\eta^\mu \overset{d}{\equiv} x^\mu(u + \Delta u, \tau) - x^\mu(u, \tau) = \Delta u\frac{\partial x^\mu}{\partial u}$$

とする．そこで（17.10）の両辺に $\Delta u\dfrac{\partial}{\partial u}$ をほどこすと，u および τ についての微分は可換であるから

$$\frac{d^2\eta^\mu}{d\tau^2} + \partial_\tau\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\eta^\tau + 2\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{d\eta^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \tag{17.11}$$

ここで η^μ の τ についての絶対微分を計算しよう．

$$\frac{D\eta^\mu}{D\tau} = \frac{d\eta^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\tau}\eta^\sigma,$$

---

* 質点の運動を長時間にわたって追跡するならば，重力の一様か否かもわかるから，本物かどうかも判断できる．しかしある瞬間における方程式（あるいは加速度）をにらんでいても，本物かどうかはわからない．

$$\frac{D^2\eta^\mu}{D\tau^2}=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{D\eta^\mu}{D\tau}\right)+\Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{D\eta^\sigma}{D\tau}.$$

これを用いて (17.11) の $d^2\eta^\mu/d\tau^2$ を絶対微分にかき直すと

$$\frac{D^2\eta^\mu}{D\tau^2}+R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}\frac{dx^\nu}{d\tau}\eta^\alpha\frac{dx^\beta}{d\tau}=0. \tag{17.12}$$

(17.10) と異なり，この各項はいずれも反変ベクトルである．特に重力が本物，すなわち永久重力場ならば，この第2項は0とはならない．そこで原則的には η^μ の行動を観測すれば，重力場が本物か否かの判別ができる．なお η^μ を**測地的変差** (geodesic deviation) という．

§18. 質点系のエネルギー運動量テンソル

一般相対論では物質の**エネルギー運動量テンソル**(今後はこの名前は長すぎるから略して**エネルギー・テンソル**と呼ぶことにする) が重力場の源として重要な役割をになう．そこで，まず1個の質点のエネルギー・テンソルを求めてみよう．それにはある瞬間，質点が静止しているようにみえる局所 Lorentz 系 (X-系) を基準にとる．これを基準にした場合の質点の座標を $Z^\mu(\tau)$，また，エネルギー・テンソル密度を $\bar{\boldsymbol{T}}^{\mu\nu}(X)$ とすれば*

$$\bar{\boldsymbol{T}}^{\mu\nu}(X)\overset{d}{\equiv}-mc\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dZ^\mu}{d\tau}\frac{dZ^\nu}{d\tau}\delta^4\{X-Z(\tau)\}d\tau. \tag{18.1}$$

ここで $\delta^4\{\ \}$ は

$$\delta^4\{X-Z(\tau)\}\overset{d}{\equiv}\delta\{X^0-Z^0(\tau)\}\delta\{X^1-Z^1(\tau)\}\cdots\delta\{X^3-Z^3(\tau)\} \tag{18.2}$$

を表わし，δ は Dirac の δ-"関数" である．X-系は時刻 $T=X^0/c$ における質点の瞬間的静止系であるから，その瞬間には $Z^0(\tau)/c$ は質点の固有時 τ に等しい．そこで (18.1) の τ に関する積分を遂行すると，$\neq 0$ の成分は

$$\bar{\boldsymbol{T}}^{00}(\vec{X},T)=-mc^2\delta\{\vec{X}-\vec{Z}(T)\}. \tag{18.3}$$

その他の成分は，$dZ^k(\tau)/d\tau=0\,(k=1,2,3)$ のために0となる．ここで $\vec{X}$,

---

* 本書では，$\bar{\boldsymbol{T}}^0{}_0$ がエネルギー密度となるような定義を採用した．したがって $\bar{\boldsymbol{T}}^{00}$ は負の量となる．

$\vec{Z}$ は3次元空間ベクトルを表わす.

さて

$$\bar{\rho}(\vec{X},\ T) \overset{d}{\equiv} m\delta\{\vec{X}-\vec{Z}(T)\} \tag{18.4}$$

は質点の瞬間的静止系（X-系）からみた場合の質点の質量密度を示す．これを使うと X-系では

$$\bar{\boldsymbol{T}}^{\mu\nu}(X) = \begin{cases} -\bar{\rho}(X)c^2 & : \quad \mu=\nu=0 \\ \quad 0 & : \quad \text{その他の成分}. \end{cases} \tag{18.1$'$}$$

これを一般の x-系からみれば，テンソル密度の定義に従って

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}^{\mu\nu}(x) &= \frac{\partial(X)}{\partial(x)}\frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial X^\beta}\bar{\boldsymbol{T}}^{\alpha\beta}(X) \\ &= -mc\frac{\partial(X)}{\partial(x)}\frac{\partial x^\mu}{\partial X^0}\frac{\partial x^\nu}{\partial X^0}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{dZ^0(\tau)}{d\tau}\right\}^2\delta^4\{X-Z(\tau)\}\,d\tau \\ &= -mc\frac{\partial(X)}{\partial(x)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\delta^4\{X-Z(\tau)\}\,d\tau. \end{aligned} \tag{18.5}$$

一般に $x^\mu = f^\mu(X^0,\ X^1,\ \cdots,\ X^3)$ という関係があるが，$\delta^4\{X-Z(\tau)\}$ のために，$x^\mu = f^\mu\{Z^0(\tau),\ \cdots,\ Z^3(\tau)\} \overset{d}{\equiv} \phi^\mu(\tau)$ とかきかえることができる.* 上の積分の中の $\partial x^\mu/\partial\tau$ は，x^μ をこのようにかきかえたものである.

ここで δ-関数に関する変換則を求めよう．任意のスカラー関数を $F(x)$ とする．一般座標変換 $x^\mu \to x^{\mu\prime} = \phi^\mu(x)$ に対して，$z^\mu \to z^{\mu\prime} = \phi^\mu(z)$ とする．また $F(x)$ は $F'(x')\{=F(x)\}$ になるとすれば

$$\int F(x)\delta^4(x-z)d^4x = F(z) = F'(z') = \int F'(x')\delta^4(x'-z')d^4x'$$

が成り立つ．したがって

$$\delta^4(x-z) = \frac{\partial(x')}{\partial(x)}\delta^4(x'-z') \tag{18.6}$$

という変換則が成立する．これを使うと

$$\delta^4(X-Z) = \frac{\partial(x)}{\partial(X)}\delta^4(x-z) \tag{18.6$'$}$$

---

* 質点の一般座標 z^μ と，局所 Lorentz 系からみたそれの座標 Z^μ の間にも $z^\mu(\tau) = f^\mu\{Z^0(\tau),\cdots,Z^3(\tau)\}$ という関係がある．したがって $\phi^\mu(\tau)$ は実は $z^\mu(\tau)$ にほかならない.

となるから，(18.5) は

$$T^{\mu\nu}(x) = -mc\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\delta^4\{x-z(\tau)\}d\tau$$

$$= -mc\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz^\mu(\tau)}{d\tau}\frac{dz^\nu(\tau)}{d\tau}\delta^4\{x-z(\tau)\}d\tau. \qquad (18.7)$$

これは (18.1) と形の上では全く同じである．δ-関数の性質を使うとさらに以下のようにかきかえることができる．まず

$$T^{\mu\nu}(x) = -mc\left\{\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz^\nu}{d\tau}\right\}_{z^0(\tau)=x^0}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\delta^4\{x-z(\tau)\}d\tau.$$

これに (18.6)′ を逆用し，さらに公式

$$\frac{\partial(X)}{\partial(x)} = \sqrt{-g(x)} \qquad (6.8)$$

を使うと

$$T^{\mu\nu}(x) = -mc\sqrt{-g(x)}\left\{\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz^\nu}{d\tau}\right\}_{z^0(\tau)=x^0}\cdot\int\delta^4(X-Z)d\tau.$$

これに (18.4) を代入し，さらにスカラー関数 $\rho(x)$ を

$$\rho(x) \overset{d}{\equiv} \bar{\rho}(X) \qquad (X \text{ と } x \text{ とは同一世界点}) \qquad (18.8)$$

により定義すれば

$$T^{\mu\nu}(x) = -\sqrt{-g(x)}\,\rho(x)\left\{\frac{dz^\mu(\tau)}{d\tau}\frac{dz^\nu(\tau)}{d\tau}\right\}_{z^0(\tau)=x^0} \qquad (18.9)$$

となる．

さて，もとの局所 Lorentz 系では

$$\frac{\partial\bar{T}^{\mu\nu}(X)}{\partial X^\mu} = 0$$

という保存則を満たす．これを，変換則を用いて x-系の量にかき直せば

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}(x) = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma^\nu{}_{\mu\rho}T^{\mu\rho} = 0. \qquad (18.10)$$

これは直接 (18.7) と，運動方程式

$$\frac{d^2z^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dz^\alpha}{d\tau}\frac{dz^\beta}{d\tau} = 0 \qquad (16.3)$$

からも証明できる．

[証 明]
$$\frac{\partial \boldsymbol{T}^{\mu\nu}(x)}{\partial x^\mu} = -mc\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz^\nu}{d\tau}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta^4\{x-z(\tau)\}\,d\tau$$
$$= mc\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz^\nu}{d\tau}\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{\partial\delta^4(x-z)}{\partial z^\mu}\,d\tau$$
$$= mc\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz^\nu}{d\tau}\frac{d}{d\tau}\delta^4\{x-z(\tau)\}\,d\tau.$$

これを部分積分し，(16.3) および (18.7) 自身を使うと

$$= mc\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}\{x=z(\tau)\}\frac{dz^\alpha}{d\tau}\frac{dz^\beta}{d\tau}\delta^4\{x-z(\tau)\}\,d\tau$$
$$= -\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}(x)\,\boldsymbol{T}^{\alpha\beta}(x),$$

すなわち

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}^{\mu\nu}(x)}{\partial x^\mu} + \Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}(x)\,\boldsymbol{T}^{\alpha\beta}(x) = 0.$$

$\boldsymbol{T}^{\mu\nu}$ に対する上述の議論は多数の質点が，与えられた重力場のなかで互いに独立に走り回っている場合へ容易に拡張することができる．N 個の質点のうちで，第 k 番目の粒子の質量を m_k，その座標を $z_{(k)}{}^\mu(\tau_k)$，あるいは略して $z^\mu(k)$ とする．τ_k はこの粒子の固有時である．この場合には (18.7) をつぎのようにかきかえればよい：

$$\boldsymbol{T}^{\mu\nu}(x) = -\sum_{k=1}^{N} m_k c\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz^\mu(k)}{d\tau_k}\frac{dz^\nu(k)}{d\tau_k}\delta^4\{x-z(k)\}\,d\tau_k\,. \tag{18.11}$$

もし粒子が非常に多数で，これらを連続流体とみなせるときは，(18.9) をつぎのようにかきかえればよい．まず，流体内の任意の点 x のまわりに十分小さな体積素片を考えるとき，その中に含まれる粒子の4元速度はどれも大体等しく，その中の任意の1個の速度 $dz^\mu(\tau)/d\tau$ で代表できるものとする．そのようなときは流体の各点における速度をベクトル場 $u^\mu(x)$ で表わすことができる．この場合 $u^\mu(x)$ は点 x にある代表的粒子の速度 $dz^\mu/d\tau$ と一致するように定義すればよい．

つぎに点 x にある粒子の瞬間的静止 Lorentz 系（X-系）からみた場合の，

その点における流体の質量密度を $\bar{\rho}(X)$ とし，これを用いてスカラー量 $\rho(x)$ （x－系からみた量）を

$$\rho(x) \overset{d}{\equiv} \bar{\rho}(X) \tag{18.12}$$

により定義する．もし圧力を無視してよいなら，（18.9）の代りに，流体のエネルギー・テンソル密度は

$$\boldsymbol{T}^{\mu\nu}(x) = -\sqrt{-g(x)}\,\rho(x)u^\mu(x)u^\nu(x) \tag{18.13}$$

とすればよい．

（18.13）も（18.10）のような**保存則**を満足する．

［証 明］ $$\frac{\partial \boldsymbol{T}^{\mu\nu}(x)}{\partial x^\mu} = -\frac{\partial}{\partial x^\mu}\{\sqrt{-g}\ \rho u^\mu\}u^\nu - \sqrt{-g}\ \rho u^\mu \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\mu}. \tag{18.14}$$

u^μ の定義，および絶対微分の定義（14.8）′を使うと

$$\begin{aligned} u^\mu(x)\frac{\partial u^\nu(x)}{\partial x^\mu} &= u^\mu\{\nabla_\mu u^\nu - \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}u^\lambda\} \\ &= \left\{\frac{D}{D\tau}\left(\frac{dz^\nu}{d\tau}\right)\right\}_{z=x} - \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}u^\mu u^\lambda. \end{aligned}$$

流体を構成している粒子はみな独立に測地線を描いて運動しているから，上の右辺第1項は0となる．したがって

$$u^\mu \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\mu} = -\Gamma^\nu{}_{\lambda\mu}u^\lambda u^\mu.$$

これを使うと（18.14）は

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\boldsymbol{T}^{\mu\nu} + \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu}\boldsymbol{T}^{\lambda\mu} = -u^\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\{\sqrt{-g}\ \rho u^\mu\}. \tag{18.15}$$

ところで右辺の｛　｝の中の量

$$\boldsymbol{s}^\mu(x) = \sqrt{-g}\ \rho u^\mu \tag{18.16}$$

は点 x における流体の流れの密度を表わす．なぜならば，x において局所 Lorentz 系をとれば，この解釈の正しいことが容易にわかる．そこで流体の保存則が成立するためには，**連続方程式**

$$\partial_\mu \boldsymbol{s}^\mu = 0 \tag{18.16$'$}$$

が成立する必要がある（111 ページ参照）．したがって（18.15）の右辺は0とな

り，エネルギー・テンソル密度（18.13）は

$$\nabla_\mu \boldsymbol{T}^{\mu\nu}(x)=0$$

を満足する．

なお，流体の圧力 $p(x)$ も考慮すれば，$\boldsymbol{T}^{\mu\nu}$ は

$$\boldsymbol{T}^{\mu\nu}(x)=-\sqrt{-g(x)}\left\{\rho u^\mu u^\nu+p\left(\frac{1}{c^2}u^\mu u^\nu+g^{\mu\nu}\right)\right\} \quad (18.17)$$

となる．これを導くには特殊相対論の場合（あるいは局所 Lorentz 系を用いて）の流体のそれを求め，それを一般相対論的にかきかえるのが最も近道であろう（付録2参照）．

§19. 重力場のなかにおける電磁気の法則

質点の運動方程式を求めたのと同様に，まず局所 Lorentz 系（X-系）を設け，それを基準にとって電磁場の法則を特殊相対論的に不変な形式にかき下す．つぎにこれに一般座標変換をほどこす．その際，式の中にでてくる X-系と一般座標系（x-系）との間の関係に依存する $\partial x^\mu/\partial X^\nu$ や $\partial^2 x^\mu/\partial X^\alpha \partial X^\beta$ 等はすべて公式（13.4)′によって Γ におきかえる．そのようにすれば何の任意性や不定性のはいりこむ余地もなく，一意的に一般相対論的な電磁場の法則に到達する．そのようにして導かれた方程式はすべて一般変換に対して共変な形式になっている．

重力場のなかにおける電磁気の法則，特に一般変換に対して共変な形式にかかれた Maxwell の方程式をどのようにして求めるかについては上に述べたことで十分である．そこでこれから上述の手順に従い，途中の計算は省略し，結果だけをかこう．

まず，局所 Lorentz 系を基準にしたとき電磁場の強さを示す量 $\vec{E}, \vec{B}$ を反対称共変テンソル場 $f_{\mu\nu}(=-f_{\nu\mu})$ により表わす．その定義は

$$\left.\begin{aligned}\vec{B}&\overset{d}{\equiv}(B_x, B_y, B_z)\overset{d}{\equiv}(f_{23}, f_{31}, f_{12}),\\ \frac{1}{c}\vec{E}&\overset{d}{\equiv}(f_{10}, f_{20}, f_{30}).\end{aligned}\right\} \quad (19.1)$$

つぎに4元電流 j^μ を

$$(c\rho, \vec{j}) \stackrel{d}{\equiv} (j^0, j^1, j^2, j^3) \tag{19.2}$$

と定義する．ここで ρ は局所 Lorentz 系からみた電荷密度を表わし，$\vec{j}$ は電流密度である．ここでは磁性体，誘電体や導体のような面倒な物は一切考えないことにする．つまり真空（そこには重力場は存在する）中に電気をもった大きさのない粒子が散在している場合を考える．粒子と粒子の間の空間は真空であり，したがって真空中の Maxwell の方程式が適用できる．

そこで，局所 Lorentz 系からみた電磁場の法則は

$$\partial_\lambda f_{\mu\nu} + \partial_\mu f_{\nu\lambda} + \partial_\nu f_{\lambda\mu} = 0, \tag{19.3}$$

$$\partial_\nu f^{\lambda\nu} = \mu_0 j^\lambda \tag{19.4}$$

となる．ここで μ_0 は真空の透磁率を表わし，真空の誘電率 ε_0 との間には $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ という関係がある．また $f^{\lambda\nu}$ は

$$f^{\lambda\nu} \stackrel{d}{\equiv} \eta^{\lambda\alpha}\eta^{\nu\beta}f_{\alpha\beta} \tag{19.5}$$

である．

これらの式を一般共変形にかきかえるには以下のかきかえの規則を使えばよい．まず，Lorentz 系で定義されたベクトルやテンソルをすべて一般変換に対してもベクトルやテンソルであるとみなす．つぎに

$$\eta_{\mu\nu}, \eta^{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}(x), g^{\mu\nu}(x), \tag{19.6 a}$$

$$\text{普通の微分 } \partial_\mu \to \text{共変微分 } \nabla_\mu . \tag{19.6 b}$$

したがって (19.3)～(19.5) はつぎのようになる：

$$\nabla_\lambda f_{\mu\nu} + \nabla_\mu f_{\nu\lambda} + \nabla_\nu f_{\lambda\mu} = 0, \tag{19.7}$$

$$\nabla_\nu f^{\lambda\nu} = \mu_0 j^\lambda , \tag{19.8}$$

$$f^{\lambda\nu} = g^{\lambda\alpha}g^{\nu\beta}f_{\alpha\beta} . \tag{19.9}$$

これが重力場の中に存在する電磁場の方程式である．これらが一般変換に対してテンソル方程式となっていることは一目瞭然である．もちろん，局所 Lorentz 系を採用すればもとの (19.3)～(19.5) に立ちもどる．

ところで，§14の最後に述べたように (19.7) の共変微分を具体的にかき下

すと，$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ を因数にもつ項はすべて相殺することがわかる．したがって (19.7) の左辺は，一般座標系を基準にしても，もとの (19.3) と同じ形式になる．(19.8) も，テンソル密度を用いると，もとの (19.4) に似た形になる．いま (19.8) の両辺に $\sqrt{-g(x)}$ を掛けると，簡単な計算ののちに

$$\partial_\nu \boldsymbol{f}^{\lambda\nu} = \mu_0 \boldsymbol{j}^\lambda$$

となる．ここで

$$\boldsymbol{f}^{\lambda\nu} = \sqrt{-g}\, f^{\lambda\nu}, \qquad \boldsymbol{j}^\lambda = \sqrt{-g}\, j^\lambda \tag{19.10}$$

である．結局，一般座標系を基準にした場合，**Maxwell の方程式**は

$$\partial_\lambda f_{\mu\nu} + \partial_\mu f_{\nu\lambda} + \partial_\nu f_{\lambda\mu} = 0, \tag{19.7$'$}$$

$$\partial_\nu \boldsymbol{f}^{\lambda\nu} = \mu_0 \boldsymbol{j}^\lambda \tag{19.8$'$}$$

となる．

(19.8)′ の両辺に ∂_λ をほどこし，$\boldsymbol{f}^{\lambda\nu} = -\boldsymbol{f}^{\nu\lambda}$ を考慮すると，4元電流密度 $\boldsymbol{j}^\lambda$ は**連続方程式**

$$\partial_\lambda \boldsymbol{j}^\lambda = 0 \tag{19.11}$$

を満たさねばならないことがわかる．(19.11) は**電荷の保存則**にほかならない．なお $\boldsymbol{j}^\lambda$ がベクトル密度であるから，(11.25) により，(19.11) の左辺はスカラー密度である．さらに§12を思い起こすと [(12.5)′ 参照]，任意の空間的超曲面 V^* 上での積分

$$Q = \frac{1}{c}\iiint \boldsymbol{j}^\lambda\, dv_\lambda \tag{19.12}$$

は不変量である.* これは粒子系の全電気量を表わし，時間がたっても，その値は一定である．ここで dv_λ は超曲面上の3次元体積要素（ウエイトが -1 の密度量）を示す．

さてここで考えている物理系は，重力場の中で，電磁場の影響のもとに運動している N 個の荷電粒子の集団である．そこでこれらの粒子群の作る4元電流密度 $\boldsymbol{j}^\lambda$ を求めてみよう．まず第 k 番目の粒子の質量を m_k，電荷を e_k，その

* 任意の瞬間 $x^0 =$ 一定 において，$\boldsymbol{j}^\lambda \neq 0$ の点は有限の広がりをもった領域に限られ，空間座標の原点から遠ざかればすばやく $\boldsymbol{j}^\lambda \to 0$ とする．

一般座標を $z_{(k)}{}^{\mu}(\tau_k)$ としよう．τ_k はこの固有時である．§18 で質点系のエネルギー・テンソル密度 $\boldsymbol{T}^{\mu\nu}(x)$ に対して (18.11) という表現を導いたのと全く同じ考え方に従えば，$\boldsymbol{j}^{\lambda}(x)$ は [$z_{(k)}{}^{\mu}(\tau_k)$ を $z^{\mu}(k)$ と略記する]

$$\boldsymbol{j}^{\lambda}(x)=\sum_{k=1}^{N}e_k c\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz^{\lambda}(k)}{d\tau_k}\delta^4\{x-z(k)\}d\tau_k \tag{19.13}$$

となる．これが一般座標変換に対してベクトル密度の変換則に従うことはつぎのようにして証明できる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}^{\lambda\prime}(x')&\overset{d}{\equiv}\sum_{k=1}^{N}e_k c\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz^{\lambda\prime}(k)}{d\tau_k}\delta^4\{x'-z'(k)\}d\tau_k\\&=\sum_{k=1}^{N}e_k c\int_{-\infty}^{\infty}d\tau_k\frac{dz^{\mu}(k)}{d\tau_k}\delta^4\{x-z(k)\}\left\{\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\frac{\partial x^{\lambda\prime}}{\partial x^{\mu}}\right\}_{x=z(k)}\\&=\frac{\partial(x')}{\partial(x)}\frac{\partial x^{\lambda\prime}}{\partial x^{\mu}}\boldsymbol{j}^{\mu}(x).\end{aligned}$$

この $\boldsymbol{j}^{\lambda}(x)$ が連続方程式 (19.11) を満たすことも容易にわかる．なぜなら

$$\begin{aligned}\frac{\partial\boldsymbol{j}^{\lambda}(x)}{\partial x^{\lambda}}&=\sum_{k=1}^{N}e_k c\int\frac{dz^{\lambda}(k)}{d\tau_k}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\delta^4\{x-z(k)\}d\tau_k\\&=-\sum_{k=1}^{N}e_k c\int\frac{dz^{\lambda}(k)}{d\tau_k}\frac{\partial}{\partial z^{\lambda}(k)}\delta^4\{x-z(k)\}d\tau_k\\&=-\sum e_k c\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\tau_k}\delta^4\{x-z(\tau_k)\}d\tau_k=0.\end{aligned}$$

ついでに (19.12) に与えられた Q が粒子系の全電気量に等しいことを証明してみよう．それには積分を行う空間的超曲面 V^* をどうとっても，積分値 Q は同じ値になるという性質を利用して，おのおのの粒子の世界線が曲面 V^* を貫く点で V^* に垂直となるように超曲面 V^* を選ぶ．さて (19.13) を (19.12) に代入し，第 k 粒子に関する積分を

$$Q_k\overset{d}{\equiv}e_k\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau_k\left[\int_{V^*}\frac{dz^{\lambda}(k)}{d\tau_k}\delta^4\{x-z(k)\}dv_{\lambda}(x)\right] \tag{19.14}$$

とおく．$dv_{\lambda}(x)$ についての積分が $\neq 0$ の値をもつのは x が $z(k)$ と一致する場合である．つまり第 k 粒子が曲面 V^* を貫く点だけが Q_k にとって重要である．そこで，この交点において第 k 粒子の静止系（もちろん，局所 Lorentz 系

とする）を考え，この静止系からみた点 x の座標を X，粒子の座標を $Z(k)$，また体積要素を $dV_\lambda(X)$ とかくことにする．(19.14) の右辺の [ ] はスカラー量であるから，上述の静止系を使ってかきかえると，その結果は，ただ (19.14) の中の z を Z に，また $x\to X$，$dv_\lambda(x)\to dV_\lambda(X)$ におきかえたものになる．

ところで，第 k 粒子が V^* を貫く瞬間における静止系では，$Z^0(k)=c\tau_k$ であり

$$\frac{dZ^\lambda(k)}{d\tau_k}=\begin{cases} c & : \quad \lambda=0 \\ 0 & : \quad \lambda=1,2,3 \end{cases}$$

となる．また

$$dV_0(X)=dX^1dX^2dX^3\overset{d}{\equiv}d^3X$$

である．したがって (19.14) の [ ] は

$$\begin{aligned}[\quad]&=c\int\delta^4\{X-Z(k)\}\,d^3X\\&=c\,\delta(X^0-c\tau_k)\end{aligned}$$

となる．それゆえ

$$Q_k=e_k\int_{-\infty}^{\infty}\delta(X^0-c\tau_k)c\,d\tau_k=e_k,$$

$$Q\overset{d}{\equiv}\sum_{k=1}^{N}Q_k=\sum_{k=1}^{N}e_k.$$

電磁場からの作用をうけているときは，粒子の運動方程式 (16.3) の右辺にはMinkowski の力を表わす項がつけ加わる：

$$m_k\left[\frac{d^2z^\rho(k)}{d\tau_k{}^2}+\Gamma^\rho{}_{\alpha\beta}\{x=z(k)\}\frac{dz^\alpha(k)}{d\tau_k}\frac{dz^\beta(k)}{d\tau_k}\right]$$
$$=e_k\{g_{\mu\nu}(x)f^{\rho\mu}(x)\}_{x=z(k)}\frac{dz^\nu(k)}{d\tau_k}. \tag{19.15}$$

これが重力，および電磁場から作用をうけて運動している**荷電粒子の運動方程式**である．これも特殊相対論における対応する方程式から，何度も述べ

た手順により容易に導かれる.

運動方程式の右辺に (19.15) のような余計な項がつけ加わったのに対応して，エネルギー運動量の保存則 (18.10) にも修正が必要となる. (18.10) に対する証明を再びくり返すと

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}^{\mu\nu}(x)}{\partial x^\mu} = -\sum_{k=1}^{N} m_k c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 z^\nu(k)}{d\tau_k{}^2}\, \delta^4\{x - z(k)\}\, d\tau_k .$$

ここでは後の都合のために粒子系のエネルギー・テンソル密度 (18.11) を $\boldsymbol{M}^{\mu\nu}$ で表わした：

$$\boldsymbol{M}^{\mu\nu}(x) \overset{d}{\equiv} -\sum_{k=1}^{N} m_k c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz^\mu(k)}{d\tau_k} \frac{dz^\nu(k)}{d\tau_k}\, \delta^4\{x - z(k)\}\, d\tau_k . \tag{19.16}$$

前の式の右辺に (19. 15) を代入すると

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{N} m_k c \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}\{x = z(k)\} \frac{dz^\alpha(k)}{d\tau_k} \frac{dz^\beta(k)}{d\tau_k}\, \delta^4\{x - z(k)\}\, d\tau_k \\ &\quad - \sum_{k=1}^{N} e_k c \int \{g_{\alpha\beta}(x) f^{\nu\alpha}(x)\}_{x=z(k)} \cdot \frac{dz^\beta(k)}{d\tau_k}\, \delta^4\{x - z(k)\}\, d\tau_k \\ &= -\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}(x) \boldsymbol{M}^{\alpha\beta}(x) - g_{\alpha\beta}(x) f^{\nu\alpha}(x) \boldsymbol{j}^\beta(x). \end{aligned}$$

つまり

$$\partial_\mu \boldsymbol{M}^{\mu\nu} + \Gamma^\nu{}_{\alpha\beta} \boldsymbol{M}^{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} f^{\nu\alpha} \boldsymbol{j}^\beta. \tag{19.17}$$

あるいは

$$\nabla_\mu \boldsymbol{M}^{\mu\nu} = -f^{\nu\alpha} \boldsymbol{j}_\alpha \tag*{(19.17)$'$}$$

が保存則に代るべき関係式となる.

(19.17)′ の右辺が $\neq 0$ となったのは，粒子と電磁場との間にエネルギー，運動量のやりとりがあるためである. もし電磁場のエネルギー・テンソル密度

$$\boldsymbol{E}^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \frac{1}{\mu_0}\sqrt{-g}\left\{-g_{\alpha\beta} f^{\mu\alpha} f^{\nu\beta} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}\right\} = \boldsymbol{E}^{\nu\mu} \tag{19.18}$$

を加えると再び保存則

$$\nabla_\mu (\boldsymbol{M}^{\mu\nu} + \boldsymbol{E}^{\mu\nu}) = 0 \tag{19.19}$$

が成り立つ.

［証 明］ $\boldsymbol{E}^{\mu\nu}$ に対応するテンソルを

$$E^{\mu\nu} \stackrel{d}{\equiv} \frac{1}{\sqrt{-g}} \boldsymbol{E}^{\mu\nu}$$

とおけば

$$\nabla_\mu\{\mu_0 E^{\mu\nu}\} = -g_{\alpha\beta}\nabla_\mu f^{\mu\alpha}\cdot f^{\nu\beta} - f^{\mu\alpha}g^{\nu\lambda}\nabla_\mu f_{\lambda\alpha} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}f^{\alpha\beta}\nabla_\mu f_{\alpha\beta}.$$

この第1項には (19.8) を代入する．また，第2項の $\nabla_\mu f_{\lambda\alpha}$ を (μ, α) について反対称の形にかきかえると

$$右辺 = \mu_0 g_{\alpha\beta} j^\alpha f^{\nu\beta} + \frac{1}{2}g^{\nu\lambda}f^{\mu\alpha}(\nabla_\alpha f_{\lambda\mu} - \nabla_\mu f_{\lambda\alpha})$$

$$+ \frac{1}{2}g^{\mu\nu}f^{\alpha\beta}\nabla_\mu f_{\alpha\beta},$$

第2，3項の添字を少しかきかえると

$$= \mu_0 g_{\alpha\beta} f^{\nu\beta} j^\alpha + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}f^{\alpha\beta}(\nabla_\mu f_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha f_{\beta\mu} + \nabla_\beta f_{\mu\alpha}).$$

この最後の項は (19.7) により0となる．結局

$$\nabla_\mu E^{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} f^{\nu\alpha} j^\beta, \qquad (19.20)$$

あるいは

$$\nabla_\mu \boldsymbol{E}^{\mu\nu} = f^{\nu\alpha}\boldsymbol{j}_\alpha \qquad (19.20)'$$

となる．この結果と (19.17)′ を加えると (19.19) が導かれる．

なお，(19.18) に与えられた $\boldsymbol{E}^{\mu\nu}$ が電磁場のエネルギー・テンソル密度であることは，局所 Lorentz 系を用いて，その各成分を調べれば容易に納得できる．たとえば，局所 Lorentz 系を用いて $\boldsymbol{E}^0{}_0$ をかくと

$$\boldsymbol{E}^0{}_0 = \frac{1}{\mu_0}\left\{f^{0\alpha}f_{0\alpha} + \frac{1}{4}f_{\alpha\beta}f^{\alpha\beta}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\varepsilon_0(\vec{E})^2 + \frac{1}{\mu_0}(\vec{B})^2\right\}$$

となる．これは電磁場のエネルギー密度にほかならない．

以上で荷電粒子系と相互作用している電磁場の法則の一般相対論的かきかえは完了した．最後に二，三の補足をしてこの節を終えよう．

まず，$f_{\mu\nu}$ に対するデュアル・テンソル密度

$$^*\boldsymbol{f}^{\rho\sigma} \stackrel{d}{\equiv} \frac{1}{2!}\boldsymbol{E}^{\rho\sigma\mu\nu}f_{\mu\nu} \qquad (19.21)$$

を使うと (19.7)′ は

$$\partial_\rho {}^*\boldsymbol{f}^{\rho\sigma} = 0$$

となる．したがって Maxwell の方程式は

$$\partial_\rho {}^*\boldsymbol{f}^{\lambda\rho} = 0, \tag{19.22}$$

$$\partial_\rho \boldsymbol{f}^{\lambda\rho} = \mu_0 \boldsymbol{j}^\lambda \tag{19.8$'$}$$

とかくこともできる．

第2の補足は，**4元ポテンシャル**を用いた場合の話である．§11 の定理3によれば，(19.7)′ が成立することから $f_{\mu\nu}$ は4元ポテンシャル A_μ を用いて

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{19.23}$$

のようにかき表わされる．ここで局所 Lorentz 系を用いたとき A_μ は

$$(-cA_0) \overset{d}{\equiv} \text{スカラー・ポテンシャル} \overset{d}{\equiv} \phi,$$

$$(A_1,\ A_2,\ A_3) \overset{d}{\equiv} \text{ベクトル・ポテンシャル} \overset{d}{\equiv} \vec{A}$$

である．

(19.23) を (19.8) に代入し，さらに Lorentz 条件

$$\nabla_\mu A^\mu = 0 \tag{19.24}$$

を用いると

$$\begin{aligned}\mu_0 j^\lambda &= g^{\lambda\alpha} g^{\nu\beta} \nabla_\nu (\nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha) \\ &= g^{\lambda\alpha} (\nabla_\nu \nabla_\alpha - \nabla_\alpha \nabla_\nu) A^\nu - (g^{\nu\beta} \nabla_\nu \nabla_\beta) A^\lambda \\ &= g^{\lambda\alpha} R^\nu{}_{\rho\nu\alpha} A^\rho - \Box A^\lambda = -R^\lambda{}_\rho A^\rho - \Box A^\lambda.\end{aligned}$$

すなわち

$$\Box A^\lambda + R^\lambda{}_\rho A^\rho = -\mu_0 j^\lambda \tag{19.25}$$

となる．ここで $\Box A^\lambda$ とは

$$\Box A^\lambda \overset{d}{\equiv} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta A^\lambda$$

のことである．

§20. Hamilton の原理

質点の運動方程式 (16.3) が **Hamilton の原理**，つまり変分法によって導

かれたのと同様に Maxwell の方程式 (19.8)′ や, 電磁場と相互作用している荷電粒子の運動方程式 (19.15) もひとつの **作用積分** から変分法により導くことができる.

いま, N 個の荷電粒子が電磁場および重力場と相互作用しているとする. 電磁場の4元ポテンシャルを $A_\mu(x)$, また第 k 番目の粒子の電荷を e_k, 質量を m_k, その座標は $z^\mu(k)$ と略記する. しかし, 重力ポテンシャル $g_{\mu\nu}(x)$ はあらかじめ与えられているものとする.

このような物理系の全作用積分は

$$I \overset{d}{\equiv} \sum_{k=1}^{N}\int\{-m_k c\sqrt{-g_{\mu\nu}(k)\dot{z}^\mu(k)\dot{z}^\nu(k)} + e_k A_\mu(k)\dot{z}^\mu(z)\}\,d\tau_k$$

$$-\frac{1}{4\mu_0 c}\int f_{\alpha\beta}f_{\rho\sigma}g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}\sqrt{-g}\,d^4x \tag{20.1}$$

とすればよい. ここで以下のような略号を使った.

$$\dot{z}^\mu(k) \overset{d}{\equiv} \frac{dz^\mu(k)}{d\tau_k}, \qquad g_{\mu\nu}(k) \overset{d}{\equiv} g_{\mu\nu}\{x = z(k)\},$$

$$A_\mu(k) \overset{d}{\equiv} A_\mu\{x = z(k)\}, \qquad f_{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

あるいは **Lagrange 関数** $\boldsymbol{L}(x)$ を

$$\boldsymbol{L}(x) \overset{d}{\equiv} -\frac{1}{4\mu_0 c}\sqrt{-g(x)}\,f_{\alpha\beta}f_{\rho\sigma}g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\int\{-m_k c\sqrt{-g_{\mu\nu}(x)\dot{z}^\mu(k)\dot{z}^\nu(k)}$$

$$+e_k A_\mu(x)\dot{z}^\mu(k)\}\,\delta^4\{x - z(k)\}\,d\tau_k \tag{20.2}$$

と定義すれば

$$I = \int \boldsymbol{L}(x)d^4x \tag{20.3}$$

とかくこともできる ($d^4x = dx^0dx^1dx^2dx^3$).

まず, I の $z^\mu(k)$ に関する変分を求めてみよう. (20.1) から $z^\mu(k)$ に対する Euler の方程式は

$$\frac{\partial\{\ \ \}}{\partial z^\mu(k)} - \frac{d}{d\tau_k}\frac{\partial\{\ \ \}}{\partial\dot{z}^\mu(k)} = 0$$

となる．{ }は (20.1) の第1項の被積分関数を示す．

この第1項は，τ_k が固有時であることを思い起こすと

$$\frac{1}{2}m_k\partial_\mu g_{\alpha\beta}(k)\dot{z}^\alpha(k)\dot{z}^\beta(k)+e_k\partial_\mu A_\nu(k)\dot{z}^\nu(k)$$

となる．また第2項は

$$-\frac{1}{2}m_k(\partial_\beta g_{\mu\alpha}+\partial_\alpha g_{\mu\beta})_{x=z(k)}\cdot\dot{z}^\alpha(k)\dot{z}^\beta(k)-m_k g_{\mu\alpha}(k)\ddot{z}^\alpha(k)$$
$$-e_k\partial_\nu A_\mu(k)\dot{z}^\nu(k).$$

そこで両項を加えると

$$m_k\{\ddot{z}^\lambda(k)+\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}(k)\dot{z}^\alpha(k)\dot{z}^\beta(k)\}=e_k f^{\lambda\alpha}(k)\dot{z}_\alpha(k), \tag{20.4}$$

ただし

$$\dot{z}_\alpha(k)\overset{d}{\equiv}g_{\alpha\beta}(k)\dot{z}^\beta(k).$$

(20.4) はまさに (19.15) にほかならない．

つぎに I の $A_\mu(x)$ に関する変分を求めよう．それには (20.1) よりも (20.3) を使うほうが便利である．Euler の方程式は

$$\frac{\delta \boldsymbol{L}}{\delta A_\mu(x)}\overset{d}{\equiv}\frac{\partial \boldsymbol{L}(x)}{\partial A_\mu(x)}-\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \boldsymbol{L}(x)}{\partial A_{\mu,\nu}(x)}\right)=0$$

となる．この第1項は

$$\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial A_\mu(x)}=\sum_{k=1}^N e_k\int \dot{z}^\mu(k)\delta^4\{x-z(k)\}\,d\tau_k\,.$$

$\boldsymbol{j}^\mu(x)$ の定義 (19.13) を使うと

$$\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial A_\mu(x)}=\frac{1}{c}\boldsymbol{j}^\mu(x) \tag{20.5}$$

となる．また第2項は

$$\frac{1}{\mu_0 c}\partial_\nu\{\sqrt{-g}\,f^{\nu\mu}\}=-\frac{1}{\mu_0 c}\partial_\nu \boldsymbol{f}^{\mu\nu}\,.$$

そこで結局

$$\partial_\nu \boldsymbol{f}^{\mu\nu}=\mu_0 \boldsymbol{j}^\mu\,.$$

これは (19.8)′ にほかならない．なお Maxwell の方程式のうちのもう1組 (19.7)′ は $f_{\mu\nu}\overset{d}{\equiv}\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ のために，自動的に成立している．

さて，はじめに述べたように $g_{\mu\nu}(x)$ はあらかじめ与えられた x の既知関数である．しかし，これから $g_{\mu\nu}(x)$ を

$$g_{\mu\nu}(x) \to g_{\mu\nu}(x) + \delta g_{\mu\nu}(x) \tag{20.6}$$

のように無限小量 $\delta g_{\mu\nu}$ だけ変化させたとき，I がどのように変化するかを考えてみよう．$g_{\mu\nu}$ が x のどのような関数であるかは，既にわかっているから，これを未知の物理量として，その振舞を方程式からきめるというようなことはここでは考えない．したがって $g_{\mu\nu}$ の変化に対しては Hamilton の原理を適用しない．$g_{\mu\nu}(x)$ についても，電磁場の4元ポテンシャル $A_\mu(x)$ と同じように，場の方程式を解いて，その振舞を探求するという問題はつぎの章で扱う．その場合には，$g_{\mu\nu}$ の変化に対しても Hamilton の原理を適用するであろう．

さて，(20.6) という変化に対して

$$\delta I = \int \frac{\delta \boldsymbol{L}(x)}{\delta g_{\mu\nu}(x)}\, \delta g_{\mu\nu}(x) d^4x.$$

ここで公式

$$\delta g^{\alpha\beta} = -\, g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \delta g_{\mu\nu}\,, \tag{9.9}$$

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \tag{9.10}$$

を使うと

$$\frac{\delta \boldsymbol{L}(x)}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \overset{d}{\equiv} \frac{\partial \boldsymbol{L}(x)}{\partial g_{\mu\nu}(x)} = \frac{1}{2\mu_0 c}\sqrt{-g}\, f^{\mu\alpha} f^{\nu\beta} g_{\alpha\beta} - \frac{\sqrt{-g}}{8\mu_0 c}\, g^{\mu\nu} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta}$$
$$+ \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{z}^\mu(k) \dot{z}^\nu(k) \delta^4\{x - z(k)\}\, d\tau_k\,.$$

(19.18)，(19.16) という定義を使うと

$$\frac{\delta \boldsymbol{L}(x)}{\delta g_{\mu\nu}(x)} = -\,\frac{1}{2c}\{\boldsymbol{E}^{\mu\nu}(x) + \boldsymbol{M}^{\mu\nu}(x)\}. \tag{20.7}$$

あるいは (9.9) を使うと

$$\frac{\delta \boldsymbol{L}(x)}{\delta g^{\mu\nu}(x)} = +\,\frac{1}{2c}\{\boldsymbol{E}_{\mu\nu}(x) + \boldsymbol{M}_{\mu\nu}(x)\} \tag{20.7$'$}$$

となる．(20.7)，(20.7)′ は非常に役に立つ関係式である．

一般に任意の物理系の Lagrange 関数 $\boldsymbol{L}(x)$ が与えられているとき，この物理系の **対称エネルギー・テンソル密度** を求めるには，まずこの $\boldsymbol{L}(x)$

を一般変換に対してスカラー密度となるようにかきかえる．それに公式(20.7)あるいは(20.7)′を応用すれば，一般変換に対して対称テンソル密度として振舞うエネルギー・テンソル密度が導かれる．もし重力の影響を考慮する必要がなければ，その結果に含まれている $g_{\mu\nu}$ をすべて $\eta_{\mu\nu}$ におきかえればよい．なお，$\boldsymbol{L}$ を一般変換に対してスカラー密度となるようにかきかえるのには，もとの $\boldsymbol{L}$ が $\eta_{\mu\nu}$ を含むならばそれを $g_{\mu\nu}$ におきかえねばならない．さらに，もとの $\boldsymbol{L}$ の中の普通の微分は共変微分におきかえる必要がある．したがって，かきかえられた $\boldsymbol{L}$ は $g_{\mu\nu}$ ばかりでなく，一般には，さらに $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^\lambda$ にも依存することになる．したがって(20.7)をそのような場合にも使えるようにするには

$$\frac{\delta \boldsymbol{L}}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \overset{d}{\equiv} \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial g_{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}}\right) = -\frac{1}{2c}\boldsymbol{T}^{\mu\nu} \qquad (20.7)''$$

とすればよい．ここで $\boldsymbol{T}^{\mu\nu}$ は Lagrange 関数 $\boldsymbol{L}$ で表わされた物理系のエネルギー・テンソル密度を示す．(20.7)のこのような一般化が正しいことは，後に第4章で示されるであろう．ここでは(20.7)″の応用例を以下に示そう．

いま，Lorentz 変換に対して共変ベクトルとして振舞う場 $A_\mu(x)$ が，波動方程式

$$(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu)A_\alpha = 0 \qquad (20.8)$$

を満足するものとする．この方程式は作用積分

$$I \overset{d}{\equiv} \int L(x)d^4x,$$

$$L(x) = -\frac{1}{2c}\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\partial_\mu A_\alpha \partial_\nu A_\beta \qquad (20.9)$$

から変分原理を使って導かれる．

さて，(20.9)はもちろん Lorentz 変換に対して不変であるが，これを上述の手順に従って，まず一般変換に対してスカラー密度となるようにかきかえよう．その結果を $\boldsymbol{L}$ とすれば

$$c\boldsymbol{L}(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\mu A_\alpha \nabla_\nu A_\beta \qquad (20.10)$$

となる．これを(20.7)″に代入すれば

$$c\frac{\partial L}{\partial g_{jk}} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}(\nabla^j A^\alpha \nabla^k A_\alpha + \nabla_\mu A^j \nabla^\mu A^k) - \frac{1}{4}\sqrt{-g}\, g^{jk}\nabla_\mu A_\alpha \nabla^\mu A^\alpha$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\nabla^\mu A^\alpha (A^j \Gamma^k{}_{\mu\alpha} + A^k \Gamma^j{}_{\mu\alpha}),$$

$$-\partial_l\left(\frac{\partial L}{\partial g_{jk,l}}\right) = \frac{1}{4}\partial_l[\sqrt{-g}\,\{A^l(\nabla^j A^k + \nabla^k A^j) - (A^j\cdot\nabla^k A^l + A^k\cdot\nabla^j A^l)$$

$$-(A^j\cdot\nabla^l A^k + A^k\cdot\nabla^l A^j)\}].$$

そこで

$$c\left\{\frac{\partial L}{\partial g_{jk}} - \partial_l\left(\frac{\partial L}{\partial g_{jk,l}}\right)\right\} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\left\{\nabla^j A^\alpha\cdot\nabla^k A_\alpha + \nabla_\mu A^j\cdot\nabla^\mu A^k\right\}$$

$$-\frac{1}{4}g^{jk}\sqrt{-g}\,\nabla_\mu A_\alpha\cdot\nabla^\mu A^\alpha$$

$$+\frac{1}{4}\nabla_l[\sqrt{-g}\,\{A^l(\nabla^j A^k + \nabla^k A^j)$$

$$-(A^j\cdot\nabla^k A^l + A^k\cdot\nabla^j A^l)$$

$$-(A^j\cdot\nabla^l A^k + A^k\cdot\nabla^l A^j)\}]$$

$$\stackrel{d}{\equiv} -\frac{1}{2}T^{jk}$$

となる．

もし重力場との相互作用を切りすてるならば

$$T^{jk} \stackrel{d}{\equiv} -(\partial^j A^\alpha \partial^k A_\alpha + \partial_\mu A^j \partial^\mu A^k) + \frac{1}{2}\eta^{jk}\partial_\mu A_\alpha \partial^\mu A^\alpha$$

$$-\frac{1}{2}\partial_l[A^l(\partial^j A^k + \partial^k A^j) - (A^j\partial^k A^l + A^k\partial^j A^l)$$

$$-(A^j\partial^l A^k + A^k\partial^l A^j)].$$

これが場 A_μ のエネルギー・テンソルである． これに ∂_j を掛け， 波動方程式(20.8) を使えば

$$\partial_j T^{jk} = 0$$

となる．もしこれを一般座標系を用いてかけば

$$\nabla_j T^{jk} = 0$$

となる．

第4章　重力場の方程式

§ 21. Einstein の方程式

これから重力ポテンシャル $g_{\mu\nu}(x)$ を規定する重力場の方程式を求めよう．それは Newton の重力ポテンシャル $\varphi(x)$ に対する方程式

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho(x) \tag{21.1}$$

に対応するものである．ここで $\rho(x)$ は重力場の源となる物質の質量密度を表わし，G は万有引力定数

$$G = (6.670 \pm 0.005) \times 10^{-8}\,\mathrm{cm^3\,g^{-1}\,s^{-2}}$$

である．

さて，求める方程式は10個の未知関数 $g_{\mu\nu}(x)$ を規定するものであるから，10個の連立方程式であり，一般相対性原理に従うためには，それはテンソル方程式でなければならない．(21.1) からの類推によれば，それはつぎのような形をした2階対称テンソルの等式

$$F^{\mu\nu}\left(g,\ \frac{\partial g}{\partial x},\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x}\right) = M^{\mu\nu} \tag{21.1$'$}$$

と考えてよい．ここで左辺はポテンシャル $g_{\mu\nu}$，およびその1, 2階の微係数だけからできあがっている対称テンソルである．他方，この右辺は重力場の源となる物質（これからは質量をもった物質だけでなく，電磁場さえも物質のなかに含めることにする）に関係する量である．しかも，(21.1) を近似的に使用できるような場合，たとえば源の物質が静止しているようなときは，対称テンソル $M^{\mu\nu}$ は質量密度 ρ に近似的に比例する必要がある．重力の源として，たとえば質点系を考えるとき，そのようなテンソルとしてはエネルギー・テンソル

$$T^{\mu\nu}(x) = -\rho(x)u^{\mu}(x)u^{\nu}(x) \tag{21.2}$$

がまさにこの要請にかなっている [(18.13) 参照]．もし，点 x において，質

点系の局所静止 Lorentz 系（X-系）をとれば

$$\bar{T}^{\mu\nu}(X)=\begin{cases}-\bar{\rho}(X)c^2 & : \ \mu=\nu=0 \\ 0 & : \ \text{その他の成分}\end{cases}$$

となる．$\bar{\rho}(X)$ はこの静止系からみた質量密度で数値的には

$$\rho(x)\overset{d}{\equiv}\bar{\rho}(X) \tag{21.3}$$

である．(21.3) はスカラーの質量密度 $\rho(x)$ の定義式である．

そこで，これからは単に質点系にかぎらず，一般的に $M^{\mu\nu}$ を $\alpha T^{\mu\nu}(x)$ とおく．$T^{\mu\nu}$ は重力場の源となる広義の物質系の対称エネルギー・テンソルを表わし，α はある比例定数である．したがって (21.1)′ は

$$F^{\mu\nu}\left(g,\ \frac{\partial g}{\partial x},\ \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial x}\right)=\alpha T^{\mu\nu} \tag{21.1)''$$

となる．

いま，重力場内の任意の1点 x において局所 Lorentz 系を設けたとすると，その近傍では $F^{\mu\nu}$ は $\partial^2 g_{\rho\sigma}/\partial x^\alpha\partial x^\beta$ だけの関数となる． また §17 によれば，重力が非常に弱いときは，g_{00} は重力ポテンシャル φ の1次式となる． この事実と，(21.1) が経験事実とよく合うということを考えあわせるとき $F^{\mu\nu}$ は $\partial^2 g_{\rho\sigma}/\partial x^\alpha\partial x^\beta$ の1次式であると考えてよかろう．そこで以下の要請をしよう．

(a) $F^{\mu\nu}$ は $g_{\rho\sigma}$, $\partial g_{\rho\sigma}/\partial x^\alpha$, $\partial^2 g_{\rho\sigma}/\partial x^\alpha\partial x^\beta$ だけからできあがっている2階対称テンソルである．

(b) $F^{\mu\nu}$ は $\partial^2 g_{\rho\sigma}/\partial x^\alpha\partial x^\beta$ の1次式である．

(c) いかなる $g_{\mu\nu}$ に対してもつぎの関係式が常に成立しなければならない：

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu}\equiv 0. \tag{21.4}$$

この最後の要請はつぎの理由から必要である．一般に重力場と物質系との相互作用のないときは，つまり特殊相対論のワクのなかでは，物質系のエネルギー・テンソル $T^{\mu\nu}$ は必ず保存則

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}T^{\mu\nu}=0 \tag{21.5}$$

を満たさねばならない．もし重力場と相互作用しているときは，(21.5) を一般変換に対して共変な形にかきかえた

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{21.5$'$}$$

という法則が成立する必要がある．これは重力場の作用のもとにある物質系の運動方程式（電磁場の $T^{\mu\nu}$ の場合には Maxwell の方程式）からの必然的結果である．この式と (21.1)$''$ とが両立しうるためには (21.4) が成立する必要がある．しかもそれは $g_{\mu\nu}$ がどんなものであっても恒等的に成立する必要がある．なぜならば，もし (21.4) が恒等式でないとすれば，これは $g_{\mu\nu}$ に対して 4 個の制限を与える方程式となる．したがって 10 個の未知関数 $g_{\mu\nu}$ は 10 個の方程式 (21.1)$''$ のほかにさらに 4 個の方程式 (21.4) の制約をうけることになり，方程式の数が多すぎることになるからである．

上にならべた (a), (b), (c) という要請は $F^{\mu\nu}$ を決定するのに十分な条件といえる．実際§15 の定理 9 から $F^{\mu\nu}$ は 1 個の任意定数を除いて完全に決定される．すなわち重力場の方程式は

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - \lambda g^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu} \tag{21.6}$$

となる．ここでは未定係数 α の代りに κ とおいた．この方程式を **Einstein の方程式**という．左辺第 3 項の未定の係数 λ は**宇宙定数**とよばれる．これは後に説明するように非常に小さな数で，およそ

$$\lambda \approx \frac{1}{(\text{宇宙半径})^2} \approx 10^{-57} \sim 10^{-54}\,\mathrm{cm}^{-2} \tag{21.7}$$

である．したがって，宇宙全体を議論の対象とするような場合を除いては，(21.6) の左辺第 3 項（これは**宇宙項**とよばれる）は一般には省略される．そこで普通，Einstein の方程式というときは

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \kappa T^{\mu\nu} \tag{21.8}$$

を指す．右辺の比例定数 κ は **Einstein の重力定数**とよばれる．これは後に示されるように万有引力定数 G に比例し，その値は

$$\kappa = \frac{8\pi}{c^4} G = 2.07 \times 10^{-48}\,\mathrm{s^2 cm^{-1} g^{-1}} \tag{21.9}$$

である．

ここで一言注意すべきことがある．書物によっては (21.6) の宇宙項や，右辺の符号が本書のそれとは逆になっている場合がある．それは以下の理由による．まず計量テンソル $g_{\mu\nu}$ について，局所 Lorentz 系をとったとき，それは $\eta_{\mu\nu}$ となるが，これに対する本書の定義は $-\eta_{00}=\eta_{11}=\eta_{22}=\eta_{33}=1$ である．これとは逆の符号を採用する著者がしばしばいる．つぎに Ricci のテンソルについても本書とは符号が逆の定義を採用することがある．最後にエネルギー・テンソルの定義にも，符号のとりかたに2通りある．これらの事情から一見，本書の方程式と符号が異なる式を見かけるので，注意が肝心である．

(21.8) はまたつぎのようにかきかえることもできる． 両辺に $g_{\mu\nu}$ を掛けると

$$g_{\mu\nu}R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\cdot 4R=\kappa T^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\overset{d}{\equiv}\kappa T.$$

つまり

$$-R=\kappa T. \tag{21.10}$$

そこで

$$R^{\mu\nu}=\kappa\Big(T^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}T\Big). \tag{21.8$'$}$$

さて，$T^{\mu\nu}$ は広義の物質系のエネルギー・テンソルである．したがって，たとえ質量のない電磁波のようなものでも，それがエネルギーや運動量をもっているかぎり，それは重力場の源となる．これは一見，驚くべきことのようであるが，エネルギーと質量の同等であるという特殊相対論の主張を容認する以上は，当然の結果というべきであろう．

もし広義の物質が一切存在しないとき，つまりカラの空間 (empty space) の場合には $T_{\mu\nu}(x)$ はいたるところで0となる．したがって重力場は

$$R_{\mu\nu}(x)=0 \tag{21.11}$$

という方程式で表わされる．しかしこれは必ずしも時空が平坦，つまり Minkowski 型であるといっているわけではない． 時空が平坦であるための必要十分条件は§15 の定理7に述べているように20個の条件

$$R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu} = 0 \qquad (21.12)$$

が成立することである．しかし逆に（21.12）が成立すればもちろん（21.11）も成立する．つまり，物質が存在しないときは時空が平坦な場合もありうる．これはまことに満足すべき結論といえる．もちろん，時空の様子を完全にきめるには方程式（21.8）だけでなく，空間的に遠方の点における時空の様子（境界条件）とか，時間のはじめにおけるその様子（初期条件）をあらかじめ知っておく必要がある．したがって，物質の分布つまり $T^{\mu\nu}$ が与えられていても，それだけで時空の様子が完全に決定されるとはかぎらない．Mach は，時間，空間の構造はその中に散在する物質により規定されると考えた．この考えを Einstein は **Mach の原理** と名づけた．Einstein の方程式はまさにこの Mach の考えを数学的に表わしたものである．しかし時空を完全にきめるには，上述のように，Einstein の方程式のほかにさらに境界条件のような大局的な情報が必要である．したがって，Einstein の方程式は Mach の原理の半分だけを（いや半分以上かもしれない）具体化したものといえよう．

重力場の方程式として（21.6）を採用するときは，たとえ物質（広義）が存在しなくても，時空は平坦とはなりえない．仮に平坦になったとすれば，（21.12）から

$$R_{\mu\nu} = 0, \qquad R = 0$$

となる．したがって（21.6）は

$$-\lambda g^{\mu\nu} = 0$$

となる．$\lambda \neq 0$ とすれば，この式は成立することができない．方程式（21.6）を使うときはこの点に注意する必要がある．

§22. Newton の重力論との比較，変分原理

まず始めに，Einstein の方程式（21.8）′ が，ある条件のもとでは Newton の理論（21.1）と近似的に一致することを示そう．

いま座標系を適当に選んだ結果，以下の条件が成立するものとする：

（a） この系からみたとき，物質は点 x の近傍では静止しているものと

する.

(b) $g_{\mu\nu}$ は静的である. すなわち, x^0 に無関係で, さらに $g_{0k}=0$ ($k=1,2,3$) である.

(c)
$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}$$
とおくとき, x の近傍では
$$|h_{\mu\nu}(x)|\ll 1$$
とする.

ここでは
$$T^{\mu\nu}(x)=-\rho(x)u^{\mu}u^{\nu}$$
とする. そこで, 仮定 (a) から
$$\begin{cases} T^{00}=-\rho c^2 \\ \text{その他の } T^{\mu\nu}=0 \end{cases}$$
となる. したがって (c) により
$$\begin{aligned} T &\overset{d}{\equiv} g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}=(\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu})T^{\mu\nu} \\ &=\rho c^2(1-h_{00})\approx\rho c^2. \end{aligned}$$
そこで (21.8)′ の $\mu=\nu=0$ の成分を h の1次までの近似で計算すると
$$\frac{1}{2}\varDelta h_{00}=-\frac{\kappa}{2}\rho c^2. \tag{22.1}$$
一方, (17.6) によれば
$$h_{00}=-\frac{2}{c^2}\varphi. \tag{17.6}$$
そこで (22.1) は
$$\varDelta\varphi=\frac{\kappa}{2}c^4\rho.$$
ここで κ を (21.9) のようにとれば
$$\varDelta\varphi=4\pi G\rho$$
となる. これはまさに (21.1) にほかならない.

h_{00} 以外の成分については, 後に弱い重力場に関する話の際に述べる.

つぎに話題をかえて, Einstein の方程式 (21.8), あるいは (21.6) も, 適

当に Lagrange 関数を選ぶことにより，変分原理に従って導きだせることを示そう．

重力場の Lagrange 関数 $\boldsymbol{L}_G$ としては

$$\boldsymbol{L}_G = -\frac{1}{2c\kappa}\sqrt{-g}\,R \tag{22.2}$$

とすればよい．いま，広義の物質系の Lagrange 関数を $\boldsymbol{L}_M(x)$ とするとき，全物理系（重力場も含める）の作用積分としては

$$I \overset{d}{\equiv} \int \left\{\boldsymbol{L}_G(x) + \boldsymbol{L}_M(x)\right\} d^4x \tag{22.3}$$

とすればよい．これを $g_{\mu\nu}(x)$ について変分すれば，Einstein の方程式 (21.8) が導かれる．

まず第1項の変分を計算しよう（ここで扱う変分は微分と独立であるから，これらの演算の順序を交換してもかまわない）．

$$\delta\int\sqrt{-g}\,R d^4x = \int\left\{\delta(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu})\cdot R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\cdot\delta R_{\mu\nu}\right\}d^4x.$$

この式の

$$(\text{第1項}) = \int\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}R - R^{\rho\sigma}\right\}\delta g_{\rho\sigma}\,d^4x.$$

また

$$\begin{aligned}(\text{第2項}) = \int\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\{&\partial_\mu\delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\lambda} - \partial_\lambda\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + \delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\rho}\cdot\Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}\\ &+ \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho}\delta\Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} - \delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\cdot\Gamma^\rho{}_{\lambda\rho} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho{}_{\lambda\rho}\}\,d^4x.\end{aligned}$$

ここで $g_{\mu\nu} \to \bar{g}_{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ という変化に対応してアフィン係数 Γ も $\Gamma \to \bar{\Gamma} \overset{d}{\equiv} \Gamma + \delta\Gamma$ に変化したとする．しかし $\bar{g}_{\mu\nu}$ が $g_{\mu\nu}$ と同様にテンソルならば，$\bar{\Gamma}$ も Γ と同じ変換則 (13.4) を満足することがわかる．それゆえ，新旧の差

$$\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \bar{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$$

は一般座標変換に対して添字の示すタイプの混合テンソルとなる．そこで上の変分の計算の第2項の { } の中はテンソルの共変微分の定義を使って

$$\{\quad\} = \nabla_\mu\delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\lambda} - \nabla_\lambda\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$$

という形にまとめられる．あるいは $g_{\mu\nu}$ の共変微分は0であるから

$$\int[\nabla_\mu(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\lambda})-\nabla_\lambda(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu})]d^4x$$

とかきかえてもよい．

ところで，上の各項の（　）の中はいずれも反変ベクトル密度である．また§14によれば，任意の反変ベクトル密度 $\boldsymbol{T}^\mu$ に対して

$$\nabla_\mu\boldsymbol{T}^\mu=\partial_\mu\boldsymbol{T}^\mu$$

である．そこで，結局

$$\delta\int\sqrt{-g}\,Rd^4x=-\int\sqrt{-g}\Big(R^{\rho\sigma}-\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}R\Big)\delta g_{\rho\sigma}d^4x$$
$$+\int\partial_\lambda\{\sqrt{-g}\,(g^{\lambda\nu}\delta\Gamma^\rho{}_{\nu\rho}-g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu})\}\,d^4x. \qquad (22.4)$$

もし変分 $\delta g_{\mu\nu}$，$\delta\Gamma$ が積分域の表面で0となるならば（22.4）の右辺の第2の積分は0となる．そこで，結局

$$\delta I=\frac{1}{2c\kappa}\int\Big\{\sqrt{-g}\Big(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\Big)+\kappa\cdot2c\frac{\delta\boldsymbol{L}_M}{\delta g_{\mu\nu}}\Big\}\delta g_{\mu\nu}d^4x$$

となる．あるいは（20.7）″を使うと

$$\delta I=\frac{1}{2c\kappa}\int\{\boldsymbol{G}^{\mu\nu}-\kappa\boldsymbol{T}^{\mu\nu}\}\,\delta g_{\mu\nu}d^4x$$

となる．ここで

$$\boldsymbol{G}^{\mu\nu}\overset{d}{\equiv}\sqrt{-g}\,G^{\mu\nu}\overset{d}{\equiv}\sqrt{-g}\Big\{R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\Big\}$$

である．そこで Hamilton の原理にしたがって $\delta I=0$ とおけば

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R-\kappa T^{\mu\nu}=0 \qquad (22.5)$$

となる．ここで

$$T^{\mu\nu}\overset{d}{\equiv}\frac{1}{\sqrt{-g}}\boldsymbol{T}^{\mu\nu}\overset{d}{\equiv}-\frac{2c}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\boldsymbol{L}_M}{\delta g_{\mu\nu}} \qquad (22.6)$$

である．（22.5）は Einstein の方程式（21.8）にほかならない．なお，（21.6）を導くのには（22.3）の代りに

$$I' = \int \left\{ \boldsymbol{L}_G(x) + \boldsymbol{L}_M(x) \right\} d^4x - \frac{\lambda}{c\kappa} \int \sqrt{-g}\, d^4x \qquad (22.3)'$$

を作用積分に採ればよい．

さて，$\boldsymbol{R} \overset{d}{\equiv} \sqrt{-g}\, R$ はつぎのようにかきかえられる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R} &\overset{d}{\equiv} \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \{ \partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\nu\lambda} - \partial_\lambda \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho} \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \Gamma^\rho{}_{\lambda\rho} \} \\ &= \partial_\mu [\sqrt{-g}\, \{ g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda{}_{\nu\lambda} - g^{\alpha\beta} \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \}] - \partial_\mu (\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}) \cdot \Gamma^\lambda{}_{\nu\lambda} \\ &\qquad + \partial_\lambda (\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}) \cdot \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + \boldsymbol{G}. \end{aligned} \qquad (22.7)$$

ここで

$$\boldsymbol{G} \overset{d}{\equiv} \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \{ \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho} \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \Gamma^\rho{}_{\lambda\rho} \}. \qquad (22.8)$$

(22.7) の右辺の第 2，第 3 項の $g_{\alpha\beta}$ の微分を Γ でかき直すと

$$(\text{第 2 項}) + (\text{第 3 項}) = -2\boldsymbol{G}$$

となる．したがって

$$\boldsymbol{R} = -\boldsymbol{G} + \partial_\mu \boldsymbol{D}^\mu \qquad (22.9)$$

という形になる．ここで

$$\boldsymbol{D}^\mu \overset{d}{\equiv} \sqrt{-g}\, \{ g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda{}_{\nu\lambda} - g^{\alpha\beta} \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \}. \qquad (22.10)$$

(22.9) を (22.4) の左辺に代入すると

$$\begin{aligned} \delta \int \boldsymbol{R}\, d^4x &= -\int \delta \boldsymbol{G}\, d^4x + \int \partial_\mu \delta \boldsymbol{D}^\mu\, d^4x \\ &= -\int \boldsymbol{G}^{\rho\sigma} \delta g_{\rho\sigma}\, d^4x + \int \partial_\mu \left\{ \sqrt{-g}\, (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda{}_{\nu\lambda} - g^{\alpha\beta} \delta \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}) \right\} d^4x. \end{aligned} \qquad (22.11)$$

もし δg, $\delta\Gamma$ が積分域の表面で 0 となるような変分を考えるならば (22.11) は

$$\int \delta \boldsymbol{G}\, d^4x = \int \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial g_{\rho\sigma}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial g_{\rho\sigma,\mu}} \right) \right\} \delta g_{\rho\sigma}\, d^4x = \int \boldsymbol{G}^{\rho\sigma} \delta g_{\rho\sigma}\, d^4x$$

となる．つまり

$$\frac{\delta \boldsymbol{G}}{\delta g_{\rho\sigma}} \overset{d}{\equiv} \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial g_{\rho\sigma}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial g_{\rho\sigma,\mu}} \right) = \boldsymbol{G}^{\rho\sigma} \qquad (22.12)$$

が成立する．

以上から Einstein の方程式を変分原理を用いて導くのには (22.3) に与えた I の代りに

$$I'' = \frac{1}{2c\kappa}\int \boldsymbol{G}\, d^4x + \int \boldsymbol{L}_M\, d^4x \tag{22.13}$$

を用いてもよい．I'' の Lagrange 関数 $\boldsymbol{G}$ は $g_{\mu\nu}$ の1階微分までしか含まないので，変分法を応用するのにまことに便利である．しかし $\boldsymbol{G}$ は一般座標変換に対してスカラー密度ではない．それゆえ I'' は不変量ではないという欠点がある．これに対してもとの I は一般変換に対して不変量である．しかしその Lagrange 関数には $g_{\mu\nu}$ の2階微係数が顔をだすというやっかいなことがある．しかし I はもちろんのこと，I'' でも，変分 $g \to \bar{g}$ に対する作用積分の変分

$$\delta I = \bar{I} - I = \bar{I}'' - I''$$

は互いに一致し，かつ不変量である ($\delta g_{\mu\nu}$ は I の積分域の表面では0とする).

重力場の方程式が変分原理から導かれるべきであると要請するならば，§21の議論よりももっと少ない前提から Einstein の方程式を導くことができる．いま求める重力場の方程式

$$F^{\mu\nu} = \alpha T^{\mu\nu}$$

の左辺は§21に述べた要請のうち，(a) だけを満たすものとする．

この要請を満たすためには $g_{\mu\nu}$ およびその1階，2階の微係数だけからできているスカラー密度を Lagrange 関数にとる必要がある．しかしそれが $g_{\mu\nu}$ の2階微分を含むときは，$\partial^2 g_{\mu\nu}/\partial x^\alpha \partial x^\beta$ については1次式で，しかもその係数には $g_{\mu\nu}$ の微分が顔をだしてはいけない．もしそうでないと，導かれた Euler の方程式には $g_{\mu\nu}$ の2階以上の微分係数が顔をだすことになるからである．

このようなスカラー密度としては，§15の定理8から

$$\boldsymbol{L}_G = \sqrt{-g}\,(aR + b)$$

以外にはない．これは (22.3)$'$ の Lagrange 関数にほかならない．したがってそれから導かれる重力場の方程式は (21.6) という形となる．

このような推論により重力場の方程式をはじめて導いたのは数学者の Hilbert である．彼は Einstein とは独立にほとんど同時に，重力場の方程式(21.8)

を導いた.

Einstein の方程式を Hamilton の原理から導くことはこの理論の論理的というか，基本的構造を理解するのに役立つ．しかしそれだけではなく，実用的な利益もある．たとえば Einstein の方程式の解を求めるのに変分原理を応用すると非常に容易に答を求めることができる場合がある．このよい例は Weyl による解法である．これについては後に再び述べる．

§23. 重力場の方程式と質点の運動方程式

重力場の方程式 (21.6) あるいは (21.8) は見かけ上では 10 個の成分をもつテンソル方程式である．したがって 10 個の未知量 $g_{\mu\nu}$ を決定するのにはこれで過不足はないように思われるが，実際はそうではない．10 個の方程式 (21.6) ［あるいは (21.8)］の間には，後に述べるように 4 個の恒等式が存在する．つまり関数的に真に独立な方程式の数は 6 個である．そのために，(21.6) を解いても $g_{\mu\nu}(x)$ を完全にきめることはできず，その解には常に 4 個の未知関数が含まれる．このような事情はまことに不都合のように思われるが，実はそうではない．むしろこれこそ，場の方程式が一般座標変換に対して共変な形式になっている証拠で，歓迎すべきことである．

いま，(21.6) のある解を $g_{\mu\nu}(x)$ とする．これに対して一般座標変換 $x \to x'$ を考えよう．ここで x' と x の関係を $x^\mu = f^\mu(x')$ とする．$f^\mu(x')$ は微分可能な，また互いに関数的に独立な関数ならばなんでもよい．この変換に応じて $g_{\mu\nu}(x)$ は

$$g_{\mu\nu}(x) \to g_{\mu\nu}'(x') \overset{d}{\equiv} \frac{\partial f^\alpha(x')}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial f^\beta(x')}{\partial x^{\nu'}} g_{\alpha\beta}\{f(x')\}$$

となる．ところで x'－系からみた Einstein の方程式の中にでてくるすべての x' につけてある $'$ をゴムで消せば，それはもとの x－系における方程式と全く同じ形の方程式となる．しかしそれは上にかいた $g_{\mu\nu}'(x')$ の中にある x' の“$'$”をはぶいたもの，すなわち

$$g_{\mu\nu}'(x) \overset{d}{\equiv} \frac{\partial f^\alpha(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial f^\beta(x)}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta}\{f(x)\}$$

を解にもつ．この解はあきらかに4個の任意関数 $f^\mu(x)$ に依存する．この事情は Einstein の方程式が一般座標変換に対して形を変えないということにもとづく．もし $f^\mu(x)$ が解のなかにはいりこむのを避けたければ，この不変性を破ればよい．しかしそれは一般相対性原理にそむく．

さて，いままで述べてきた一般相対論を重力場と相互作用している質点系に適用するとき，それはつぎの意味で二元論といえる．すなわち，質点系の運動方程式としては（16.3）を要請し，質点系がどのような重力場を産みだすかについては Einstein の方程式（21.8）が，それの基本法則を与えるものと仮定された．もちろんこれらふたつの要請の間に矛盾があってはならない．両者が矛盾なく両立しうるための必要十分条件が§21に挙げた要請（c）である．（c）は重力場の方程式を決定するのに必要であった．しかしひとたび方程式が（21.8）［あるいは（21.6）］という形に決定されると，物質系のエネルギー・テンソル $T^{\mu\nu}$ は，（c）のおかげで，たとえ物質系（質点系）の運動の法則を知らなくても，保存則

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{23.1}$$

を満足することになる．もちろん（23.1）は運動方程式からも証明できるはずである．つまり（23.1）は2重の根拠から証明できる．すなわち重力場の方程式（21.8），および質点系の運動方程式から同じ結論（23.1）が導かれる．このことは運動方程式と重力場の方程式を一緒にした全方程式系のなかに4個だけ余計なものがあることを意味する．あるいは全方程式系の間には4個のある恒等式が存在するといい換えてもよい．これは実は理論が一般変換に対して不変であることに由来する．これについては後にくわしい説明をする．

Einstein はこの事情に着目して，質点系の運動方程式を別に要請しなくても，それらは重力場に対する基本方程式（21.8）から導かれるであろうと予想した．この考えは以下のように数式化することができる．

まず，基礎にとるものは，反変テンソル密度を用いてかいた Einstein の方程式

$$\boldsymbol{G}^{\mu\nu} = \kappa \boldsymbol{M}^{\mu\nu} \tag{23.2}$$

である．ただしこれが(21.8)と異なる点はつぎのことである．すなわち (23.2) の右辺の $\boldsymbol{M}^{\mu\nu}$ は左辺と同じ2階対称テンソル密度ではあるが，これの形はさしあたり未定としておく．ただしこれは質点系に関する量とする．そこで，N 個の質点のうちの第 k 番目の粒子の座標を $z^\mu(k)$ とするとき，$\boldsymbol{M}^{\mu\nu}$ を

$$\boldsymbol{M}^{\mu\nu}(x) = \sum_{k=1}^{N} \int m^{\mu\nu}(k) \delta^4\{x - z(k)\} d\tau_k \tag{23.3}$$

とおくことができる．$\boldsymbol{M}^{\mu\nu}$ が $\delta^4\{x-z\}$ を含む理由は，それが世界点 $z^\mu(k)$ に局在している質点からの寄与の総和と考えられるからである．なお $m^{\mu\nu}(k)$ はいまのところ τ_k のある未知関数である．しかし，δ-関数がスカラー密度の変換性をもつことを考えると，$\boldsymbol{M}^{\mu\nu}$ がテンソル密度となるためには $m^{\mu\nu}(\tau_k)$ は質点の世界線にそって定義された2階対称テンソルでなければならない．

さて，(23.2) の両辺に ∇_μ を掛けると，Bianchi の恒等式により左辺は $\equiv 0$ となる．したがって右辺も

$$\nabla_\mu \boldsymbol{M}^{\mu\nu}(x) = 0$$

とならねばならない．いまこの式に $\vec{x}\,(= x^1, x^2, x^3)$ の任意の関数 $f(\vec{x})$ を掛け，x^0 を固定したうえで，x^1, x^2, x^3 について，第 k 粒子の位置 $\vec{z}(k)$ だけを包む小さな3次元空間領域 ω_k にわたって積分しよう．$\boldsymbol{M}^{\mu\nu}$ に (23.3) を代入すると

$$\begin{aligned}\int_{\omega_k} f(\vec{x}) \nabla_\mu \boldsymbol{M}^{\mu\nu}(x) d^3x &= \int_{\omega_k} f(\vec{x}) \sum_{l=1}^{3} m^{l\nu}(k) \frac{\partial}{\partial x^l} \delta^4\{x - z(k)\} d\tau_k d^3x \\ &\quad + \int_{\omega_k} f(\vec{x}) m^{0\nu}(k) \frac{\partial}{\partial x^0} \delta^4\{x - z(k)\} d\tau_k d^3x \\ &\quad + \int_{\omega_k} f(\vec{x}) \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}(x) m^{\mu\lambda}(k) \delta^4\{x - z(k)\} d\tau_k d^3x = 0. \end{aligned} \tag{23.4}$$

この第1項は $\vec{x}$ に関する部分積分により，また τ の代りに z^0 を積分変数として用いると

$$\text{第1項} = -\int \sum_{l=1}^{3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^l} f(\vec{x}) \right\}_{x=z(\tau)} \cdot m^{l\nu}(k) \frac{d\tau_k}{dz^0(k)} \delta\{x^0 - z^0(k)\} dz^0(k).$$

これからしばらく，粒子の番号 k を省略して $z^\mu(k)$ を単に z^μ, τ_k を τ と略記する．そこで

$$\text{第1項} = -\left[\sum_{l=1}^{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x^l}\right)_{x=z}\cdot m^{l\nu}(\tau)\frac{d\tau}{dz^0}\right]_{\tau=\tau_0}.$$

ここで $x^0 = z^0(\tau)$ という関係が成り立つ固有時刻を τ_0 とした.

第2項のかきかえは少し面倒である. τ の代りに z^0 を積分変数にとると

$$\text{第2項} = -\int_{\omega_k} f(\vec{x})m^{0\nu}(\tau)\frac{d\tau}{dz^0}\delta\left\{\vec{x}-\vec{z}(\tau)\right\}\frac{\partial}{\partial z^0}\delta\{x^0 - z^0(\tau)\}\,dz^0 d^3x.$$

ここで $\delta(\vec{x}-\vec{z})$は $\delta(x^1-z^1)\delta(x^2-z^2)\delta(x^3-x^3)$ のことである. τ が z^0 の関数であることに注意して, z^0 について部分積分すると

$$\begin{aligned}
&= \int_{\omega_k} f(\vec{x})\frac{d}{dz^0}\left\{m^{0\nu}\frac{d\tau}{dz^0}\right\}\delta^4\{x - z(\tau)\}\,dz^0 d^3x \\
&\quad + \int_{\omega_k} f(\vec{x})m^{0\nu}\frac{d\tau}{dz^0}\delta(x^0 - z^0)\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial}{\partial z^l}\delta(\vec{x}-\vec{z})\frac{dz^l}{dz^0}\,dz^0 d^3x \\
&= \left\{f(\vec{x})_{x=z}\cdot\frac{d}{dz^0}\left(m^{0\nu}\frac{d\tau}{dz^0}\right)\right\}_{\tau=\tau_0} \\
&\quad + \sum_{l=1}^{3}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x^l}\right)_{x=z}\cdot m^{0\nu}(\tau)\frac{d\tau}{dz^0}\frac{dz^l}{dz^0}\right\}_{\tau=\tau_0}.
\end{aligned}$$

第3項はすぐに積分ができる:

$$\text{第3項} = \left\{(f\Gamma^{\nu}{}_{\mu\lambda})_{x=z}\cdot m^{\mu\lambda}(\tau)\frac{d\tau}{dz^0}\right\}_{\tau=\tau_0}.$$

そこで (23.4) は

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{3}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x^l}\right)_{x=z}\cdot\left\{m^{0\nu}(\tau)\frac{d\tau}{dz^0}\frac{dz^l}{dz^0} - m^{l\nu}(\tau)\frac{d\tau}{dz^0}\right\}\right]_{\tau=\tau_0} \\
&\quad + f\{\vec{z}(\tau_0)\}\left[\frac{d}{dz^0}\left(m^{0\nu}\frac{d\tau}{dz^0}\right) + \Gamma^{\nu}{}_{\mu\lambda}\{z(\tau)\}m^{\mu\lambda}(\tau)\frac{d\tau}{dz^0}\right]_{\tau=\tau_0} = 0.
\end{aligned}$$

f は全く任意の関数であるから, 点 $\vec{x}=\vec{z}(\tau_0)$ において $\partial f/\partial x^l$ と f の値を全く独立に採ることができる. したがって上の等式は4個に分かれて

$$m^{0\nu}\frac{dz^l}{dz^0} = m^{l\nu} \qquad (l = 1, 2, 3), \tag{23.5}$$

$$\frac{d}{dz^0}\left(m^{0\nu}\frac{d\tau}{dz^0}\right) + \Gamma^{\nu}{}_{\mu\lambda}m^{\mu\lambda}\frac{d\tau}{dz^0} = 0 \tag{23.6}$$

となる.

(23.5) で $\nu = 0$ とおけば

$$m^{l0} = m^{00} \frac{dz^l}{dz^0}. \tag{23.7}$$

ここで

$$m^{00}(\tau) \overset{d}{\equiv} -cm(\tau) \frac{dz^0}{d\tau} \frac{dz^0}{d\tau} \tag{23.8}$$

とかくことにすれば，(23.7) は

$$m^{l0} = m^{0l} = -mc \frac{dz^0}{d\tau} \frac{dz^l}{d\tau} \tag{23.7$'$}$$

となる．さらに (23.5) の ν を $j = 1, 2, 3$ とおけば，(23.7)$'$ を使って

$$m^{lj} = m^{0j} \frac{dz^l}{dz^0} = -mc \frac{dz^j}{d\tau} \frac{dz^l}{d\tau}. \tag{23.9}$$

そこで (23.8), (23.7)$'$, (23.9) から

$$m^{\mu\nu}(\tau) = -m(\tau)c \frac{dz^\mu}{d\tau} \frac{dz^\nu}{d\tau} \tag{23.10}$$

となる．この左辺はテンソルであるから，m は質点の世界線にそって定義されたスカラーであることがわかる．

(23.10) を (23.6) に代入し，両辺に $-dz^0/cd\tau$ を掛けると

$$\frac{d}{d\tau}\left(m \frac{dz^\nu}{d\tau}\right) + m\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} \frac{dz^\mu}{d\tau} \frac{dz^\lambda}{d\tau} = 0. \tag{23.11}$$

これが質点の運動方程式である．(23.11) では m は τ の関数であってもさしつかえない．ここで τ の代りに，$\tau' \overset{d}{\equiv} m_0 \int d\tau / m(\tau)$ で定義された τ' を用いれば (23.11) はよく知られた測地線の方程式となる (m_0 は定数)．

ともかく以上のようにして，重力場の方程式 (23.2) とそれが積分可能であるための条件

$$\nabla_\mu M^{\mu\nu} = 0 \tag{23.12}$$

だけから質点の運動方程式 (23.11) が導かれたことになる．しかしこれを導くのに $M^{\mu\nu}$ に対して (23.3) という形を採用したことは非常に重要な鍵となっている．つまり，質点の作る $M^{\mu\nu}$ であったから，(23.11) を導くことに成功したのである．

(23.10) をもとの (23.3) に代入し，さらに質点が N 個存在する場合に一

般化すると，$\boldsymbol{M}^{\mu\nu}$ は

$$\boldsymbol{M}^{\mu\nu}(x) = -c\sum_{k=1}^{N}\int m_k(\tau_k)\frac{dz^\mu(k)}{d\tau_k}\frac{dz^\nu(k)}{d\tau_k}\delta^4\{x - z(k)\}\,d\tau_k \quad (23.13)$$

となる．これは(18.11)にほかならない．これも $\boldsymbol{M}^{\mu\nu}$ に対する特別な形(23.3)と要請（23.12）からの結果である．この式から m_k は第 k 粒子の静止質量であることがわかる．

最後に（23.13）を（23.2）の右辺に代入すると，重力場の方程式は

$$\sqrt{-g}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) = -\kappa c\sum_{k=1}^{N}\int m_k\frac{dz^\mu(k)}{d\tau_k}\frac{dz^\nu(k)}{d\tau_k}\delta^4\{x - z(k)\}\,d\tau_k \quad (23.14)$$

という具体的な形をもつことになる．

しかしここで注意すべき重要なことがある．まず重力場の方程式(23.14)は普通にいう Einstein の方程式（21.8）とは大きなちがいがある．（21.8）では重力場の源である右辺 $T^{\mu\nu}(x)$ は与えられた量であり，しかも重力場 $g_{\mu\nu}(x)$ がどんなものであろうとも $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ を満足する．したがって実際には困難かもしれないが，原理的には(21.8)は解くことができる．これに反して(23.14)の右辺は未知量である．これは x の関数であるとともに，$z^\mu(\tau_k)$ の汎関数である．この z^μ として（23.11）の解を採用するときはじめて（23.14）は原理的に積分可能となる．しかし（23.11）を解くには $g_{\mu\nu}(x)$ に関する知識が必要である．したがって（23.14）と（23.11）とを併行して，たとえば逐次近似的に解く必要がある．このような事情のために，一元論的立場に立った方程式(23.14)はまことに扱いにくい方程式である．

注意すべき第2の点は（23.11）の $\Gamma\{x = z(k)\}$ が ∞ になるということである．いま仮に（23.11）と（23.14）を逐次近似的に解いたとしよう．まず $g_{00} = \eta_{00} + h_{00}$ とおくとき，Newton 近似では $h_{00} = -2\varphi/c^2$　($\varphi =$ Newton の重力ポテンシャル）となるから

$$h_{00}(x) = +\frac{2}{c^2}G\sum_{k=1}^{N}\frac{m_k}{|\vec{x} - \vec{z}(k)|}.$$

したがって，$\vec{x} \to \vec{z}(k)$ では $h_{00} \to \infty$ となる．これは物質を“質点”という簡

単なモデルで表現したことに対して当然支払うべき代償である．古典物理学では物質は少くとも有限の広がりをもった物体の集団と考えられる．したがって $|\vec{x}-\vec{z}(k)|$ が0になることはありえない．そこで，普通には $\Gamma\{x=z(k)\}$ を計算するときは，第 k 粒子以外の粒子の産みだす重力だけを考慮にいれ，第 k 粒子自身の作る重力場の自分自身への影響は除外する．しかしこの種の ∞ を取りのぞくことは，古典論でさえも，原理的にはともかくとして，相当に面倒な技巧を必要とする．この種の欠点は，上述の一元論的理論に固有なものではなく，物質を質点で表現するときは常についてまわる欠陥である．

上に述べたような一元論的考えを最初に思いついたのは Einstein と Grommer* である．この考えについては，その後 Einstein，Infeld，および Hoffmann** たちによりさらに立ち入った研究が行われた．その後も Einstein とその協力者による研究があるが，それらについては日本物理学会から出版されている新編物理学選集63「相対論的重力場の理論」や，共立出版の「アインシュタイン選集2」を参照するようすすめる．

§24. 時空の対称性，Killing ベクトル，Lie 微分

§17や§22で Einstein の理論と Newton の理論を比較するために，重力場のポテンシャル $g_{\mu\nu}$ が時間座標 x^0 に無関係な場合を考えた．これは時空の計量テンソルが x^0 方向の変位に対して不変ということを意味する．あるいは，時空が x^0 方向に対して一様であるといってもよい．時空のこのような特性は特に座標系を上手に選んだときにはじめて明らかとなる．しかし座標系が適当でないときは，問題にしている時空がこのような対称性をもっていることを見破ることはむずかしい．これに似た性質はまだほかにもいろいろある．たとえば特別に座標系を選んだとき $g_{\mu\nu}$ が球対称であるとか，あるいは x^3 軸に関して軸対称という性質もすべて時空の対称性である．

---

* A. Einstein and J. Grommer: Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. **1** (1927) 2.

** A. Einstein, L. Infeld and B. Hoffmann: Ann. Math. **39** (1938) 65.
A. Einstein and L. Infeld: Ann. Math. **41** (1940) 455, および Can. J. Math. **1** (1949) 209. これらの論文の邦訳は，「アインシュタイン選集2」(共立出版) にものっている．

そこでこれから座標系のとりかたに関係なく，時空がこのような対称性をもつか否かを見破ることができるように，きめ手となる条件を求めてみよう．

いま特別な座標系を x'-系とし，これを用いたとき計量テンソル $g_{\mu\nu}'(x')$ がある座標変数（たとえば $x^{a'}$）に無関係とする．もし $a=0$ なら，これは時間 $x^{0'}$ に無関係ということになる．また，円柱座標（$x^{1'}=\rho$, $x^{2'}=\varphi$, $x^{3'}=z$）を用いたとき $x^{2'}$ に無関係ならば時空は軸対称ということになる．いずれにしても，このようなときは

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}'(x')}{\partial x^{a'}}=0 \tag{24.1}$$

が成り立つ．これを一般座標系（x-系）からみると

$$\frac{\partial}{\partial x^{a'}}\left\{\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu'}}g_{\rho\sigma}(x)\right\}=0. \tag{24.1$'$}$$

x と x' の間には

$$x^{\mu}=f^{\mu}(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$$

という関係があるとする．いま仮に $a=0$ とするとき，$x^{k'}(k=1, 2, 3)$ を固定し，$x^{0'}$ だけを変化させれば，この座標系でおおわれた時空の領域 Ω の中は無数の曲線群によって満たされる．各曲線は3個の変数 $x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}$ によって識別される．したがって曲線の総数は ∞^3 個である．これらの曲線の接線ベクトルの x-系からみた成分は

$$\xi^{\mu}(x)\overset{d}{\equiv}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{a'}}=\frac{\partial f^{\mu}(x')}{\partial x^{a'}} \tag{24.2}$$

である．これは x-系の変換に対して明らかに反変ベクトルである．(24.2) を使うと，(24.1)$'$ は

$$\frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu'}}g_{\rho\sigma}+\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\nu'}}g_{\rho\sigma}+\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\lambda}}\xi^{\lambda}=0.$$

両辺に $\dfrac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}}\dfrac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\beta}}$ を掛け，$\partial g_{\rho\sigma}/\partial x^{\lambda}$ を Γ を使ってかきかえると

$$\frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\alpha}}g_{\rho\beta}+\frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\beta}}g_{\alpha\sigma}+\Gamma^{\rho}{}_{\beta\lambda}\xi^{\lambda}g_{\rho\alpha}+\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\lambda}\xi^{\lambda}g_{\rho\beta}=0.$$

あるいは

$$\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0 \qquad (24.3)$$

となる．ここで ξ_α とは

$$\xi_\alpha \stackrel{d}{\equiv} g_{\alpha\beta}\xi^\beta$$

である．つまり (24.1) が成立すれば (24.3) が成り立つ．逆に ξ^μ を未知のベクトル場とする．$g_{\mu\nu}(x)$ が与えられていれば，(24.3) は ξ^μ に対する連立微分方程式となる．この解 $\xi^\mu(x)$ がみつかったとしよう．いま $x^\mu = f^\mu(x^{0\prime})$ という曲線を

$$\xi^\mu(f^0, f^1, f^2, f^3) = \frac{df^\mu(x^{0\prime})}{dx^{0\prime}}$$

という連立常微分方程式によって定義する．この解のうち，$x^{0\prime} = 0$ のとき $f^0 = 0$ となる解を

$$f^\mu(x^{0\prime}, x^{1\prime}, x^{2\prime}, x^{3\prime}) \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

とする．$x^{1\prime}, x^{2\prime}, x^{3\prime}$ は積分定数である．いま

$$x^\mu = f^\mu(x^{0\prime}, x^{1\prime}, x^{2\prime}, x^{3\prime})$$

とおいて，座標変換 $x \to x'$ を行えば，(24.3) から上の計算を逆にたどることにより (24.1)（ただし添字 a を 0 とした式）に到達する．

さて (24.1) は，x'－系を基準にしたとき，その計量テンソルが，$x^{a\prime}$ の方向への変位に対して不変であることを意味する．一般にある変位に対して計量テンソルが不変のとき，この変位を**時空の“運動”**という．しかしこの言葉は質点の“運動”と混同しそうであるから，これからは計量を不変にする変位を **motion** と呼ぶことにする．いま x－系を基準にして，任意の点 P(その座標を x^μ) からこれに隣接した点

$$x^\mu + \varepsilon\xi^\mu(x) \qquad (\varepsilon:\ \text{無限小パラメーター})$$

までの変位を考える．この変位が motion であるための必要十分条件は上の説明から明らかなように，ベクトル $\xi^\mu(x)$ が (24.3) を満足することである．なお (24.3) を **Killing の方程式**といい，ベクトル ξ^μ を **Killing ベクトル**と呼ぶ．

ここで Lie 微分という概念を説明することにしよう．実は (24.3) の左辺は

$g_{\alpha\beta}(x)$ の Lie 微分であるからである．

まず，無限小座標変換

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} \overset{d}{\equiv} x^\mu - \Delta x^\mu(x, p) \tag{24.4}$$

を考えよう．無限小量 Δx^μ は点の位置 x だけでなく，m 個のパラメーター $p_r(r=1, 2, \cdots, m)$ にも依存するとする．しかしすべての $p_r=0(r=1, \cdots, m)$ のときは Δx^μ も 0 となるとする．今後は p_r はすべて無限小量とし，

$$\xi^\mu{}_{(r)}(x) \overset{d}{\equiv} \left.\frac{\partial \Delta x^\mu}{\partial p_r}\right)_{p=0} \tag{24.5}$$

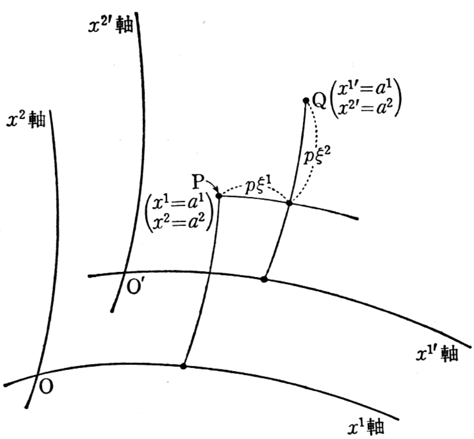
とおく．したがって (24.4) は p の1次の近似では

$$x^{\mu\prime} = x^\mu - \sum_{r=1}^{m} p_r \xi^\mu{}_{(r)}(x) \tag{24.4$'$}$$

となる．しかし話を簡単にするため，これからしばらくはパラメーターは1個とし，

$$x^{\mu\prime} = x^\mu - p\xi^\mu(x) \tag{24.4$''$}$$

とおくことにする．



第 8 図

さて，点 P の旧座標を

$$x^\mu = a^\mu$$

とする．この新しい座標は

$$x^{\mu\prime} = a^\mu - p\xi^\mu(a)$$

となる．新しい座標が a^μ という値をもつ点 Q の旧座標は

$$x^\mu = a^\mu + p\xi^\mu(a)$$

である（第8図参照）．

さて，領域 Ω のなかにあるテンソル場 [たとえば $A^{\mu\nu}{}_\lambda(x)$] が与えられているとする．点 Q におけるこのテンソルの新しい系からながめた成分は

$$A^{\mu\nu}{}_{\lambda}{}'(x'=a)=\left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\lambda'}}\right)_{Q}A^{\alpha\beta}{}_{\rho}(x=a+p\xi) \qquad (24.6)$$

である．

さて，これから Ω のなかに上述のテンソル場 $A^{\mu\nu}{}_{\lambda}(x)$ の代りに新しいテンソル場 $\bar{A}^{\mu\nu}{}_{\lambda}(x)$ を考える．もとの x-系を基準にとったとき，点 P における $\bar{A}$ の成分を

$$\bar{A}^{\mu\nu}{}_{\lambda}(P)=\bar{A}^{\mu\nu}{}_{\lambda}(x=a)\overset{d}{\equiv}A^{\mu\nu}{}_{\lambda}{}'(x'=a) \qquad (24.7)$$

と定義する．テンソル A の **Lie 微分** とは

$$\mathcal{L}_{\xi}A^{\mu\nu}{}_{\lambda}(x=a)\overset{d}{\equiv}\lim_{p\to 0}\frac{1}{p}\{\bar{A}^{\mu\nu}{}_{\lambda}(x=a)-A^{\mu\nu}{}_{\lambda}(x=a)\} \qquad (24.8)$$

のことである．

(24.8) の右辺は同じ点 P における新旧ふたつのテンソルの差であるから，もちろんこれは $A^{\mu\nu}{}_{\lambda}$ と同じタイプのテンソルである．$\bar{A}$ はもともとは (24.6) で与えられているように点 Q におけるテンソルの x'-系からみた成分 $A'(Q)$ に等しい．しかし Q の座標値 $x'=a$ は P の x 座標と数値的に等しい．また，座標変換についても，点 P における

$$x^{\mu}=a^{\mu} \quad\to\quad x^{\mu''}=f^{\mu}(x=a)$$

という変換に対する $A(P)$ の変換則と，点 Q における

$$x^{\mu'}=a^{\mu} \quad\to\quad x^{\mu'''}=f^{\mu}(x'=a)$$

という変換に対する $A'(Q)$ の変換則とは全く同じである．したがって，Q におけるテンソル $A'(Q)$ を点 P まで引きもどして，これを x-系からみた点 P における新しいテンソルの成分とみなすこと，またそれともとの $A(P)$ との差をとることはいずれも，座標変換に対して不変な操作である．

以上のことは (24.8) の右辺に (24.6) を代入し，具体的に計算をしてみれば，右辺が確かに A と同じテンソルとなることから容易に理解できる．(24.8) の右辺は定義 (24.7) および (24.6) から

$$\lim_{p\to 0}\frac{1}{p}[A^{\mu\nu}{}_{\lambda}(a+p\xi)-p(\xi^{\mu}{}_{,\alpha}A^{\alpha\nu}{}_{\lambda}+\xi^{\nu}{}_{,\beta}A^{\mu\beta}{}_{\lambda})$$
$$+p\xi^{\rho}{}_{,\lambda}A^{\mu\nu}{}_{\rho}-A^{\mu\nu}{}_{\lambda}(a)]$$

$$= A^{\mu\nu}{}_{\lambda,\alpha}\xi^\alpha - \xi^\mu{}_{,\alpha}A^{\alpha\nu}{}_\lambda - \xi^\nu{}_{,\beta}A^{\mu\beta}{}_\lambda + \xi^\rho{}_{,\lambda}A^{\mu\nu}{}_\rho$$
$$= \nabla_\alpha A^{\mu\nu}{}_\lambda\cdot\xi^\alpha - \nabla_\alpha\xi^\mu\cdot A^{\alpha\nu}{}_\lambda - \nabla_\beta\xi^\nu\cdot A^{\mu\beta}{}_\lambda + \nabla_\lambda\xi^\rho\cdot A^{\mu\nu}{}_\rho .$$

この最後の式は明らかに $A^{\mu\nu}{}_\lambda$ と同じタイプのテンソルである．これを使うと (24.8) から

$$\mathcal{L}_\xi A^{\mu\nu}{}_\lambda = -A^{\alpha\nu}{}_\lambda\nabla_\alpha\xi^\mu - A^{\mu\alpha}{}_\lambda\nabla_\alpha\xi^\nu + A^{\mu\nu}{}_\alpha\nabla_\lambda\xi^\alpha + \xi^\alpha\nabla_\alpha A^{\mu\nu}{}_\lambda \quad (24.9)$$

という定義が導かれる．ついでにスカラー，ベクトル等に対する Lie 微分の定義を二，三ならべておく．

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi S &\overset{d}{\equiv} \lim_{p\to 0}\frac{1}{p}[S'(Q) - S(P)] = \xi^\alpha\partial_\alpha S,\\
\mathcal{L}_\xi V^\mu &\overset{d}{\equiv} -V^\alpha\nabla_\alpha\xi^\mu + \xi^\alpha\nabla_\alpha V^\mu,\\
\mathcal{L}_\xi U_\mu &\overset{d}{\equiv} U_\alpha\nabla_\mu\xi^\alpha + \xi^\alpha\nabla_\alpha U_\mu,\\
\mathcal{L}_\xi W_{\mu\nu} &\overset{d}{\equiv} W_{\alpha\nu}\nabla_\mu\xi^\alpha + W_{\mu\alpha}\nabla_\nu\xi^\alpha + \xi^\alpha\nabla_\alpha W_{\mu\nu},\\
\mathcal{L}_\xi T^{\mu\nu} &\overset{d}{\equiv} -T^{\alpha\nu}\nabla_\alpha\xi^\mu - T^{\mu\alpha}\nabla_\alpha\xi^\nu + \xi^\alpha\nabla_\alpha T^{\mu\nu}.
\end{aligned}\right\} \quad (24.10)$$

ここで特にテンソル $g_{\mu\nu}$ の Lie 微分を計算してみよう．

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} &\equiv \lim_{p=0}\frac{1}{p}[g'_{\mu\nu}(x'=a) - g_{\mu\nu}(x=a)]\\
&= g_{\alpha\nu}\nabla_\mu\xi^\alpha + g_{\mu\alpha}\nabla_\nu\xi^\alpha + \xi^\alpha\nabla_\alpha g_{\mu\nu}\\
&= \nabla_\mu\xi_\nu + \nabla_\nu\xi_\mu .
\end{aligned} \quad (24.11)$$

そこで (24.3) は

$$\mathcal{L}_\xi g_{\alpha\beta} = 0 \quad (24.3)'$$

とかくこともできる．つまり，計量テンソル $g_{\alpha\beta}$ のベクトル ξ^μ の方向への Lie 微分が 0 となるとき，変位（あるいは点変換といってもよい）

$$x^\mu \to x^\mu + p\xi^\mu(x)$$

は時空の motion であることがわかる．

Lie 微分は普通の微分と演算の順序を交換できる．すなわち任意のテンソル $A^{\cdot\cdot}{}_\cdot$ に対して

$$\mathcal{L}_\xi\left(\frac{\partial A^{\cdot\cdot}{}_\cdot}{\partial x^\mu}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\mathcal{L}_\xi A^{\cdot\cdot}{}_\cdot).$$

したがって，(24.3)′ から

$$\mathcal{L}_\xi \partial_\mu g_{\alpha\beta} = 0.$$

そこで

$$\mathcal{L}_\xi \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = 0. \tag{24.12}$$

さらに

$$\mathcal{L}_\xi R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = 0. \tag{24.13}$$

(24.3)′ が成立するならば (24.12)，(24.13) も当然成り立たねばならない．さらに (24.13) の左辺を何回（普通）微分しても，それらはすべて0となる必要がある．したがって，(24.12)，(24.13) 等々は (24.3)′ を ξ について解くことができるための条件，つまり積分可能性に対する条件といえる．

Γ の Lie 微分はつぎのようになる．

$$\mathcal{L}_\xi \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \lim_{p\to 0}\frac{1}{p}\{\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}{}'(x'=a) - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(x=a)\}$$
$$= -\xi^\lambda{}_{,\alpha}\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} + \xi^\alpha{}_{,\mu}\Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu} + \xi^\alpha{}_{,\nu}\Gamma^\lambda{}_{\mu\alpha} + \xi^\lambda{}_{,\mu\nu} + \xi^\alpha\partial_\alpha\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}.$$

これを共変微分を使ってかき直すと

$$\mathcal{L}_\xi \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \nabla_\mu\nabla_\nu\xi^\lambda + R^\lambda{}_{\nu\alpha\mu}\xi^\alpha. \tag{24.14}$$

そこで積分可能性の条件 (24.12) は

$$\nabla_\mu\nabla_\nu\xi^\lambda + R^\lambda{}_{\nu\alpha\mu}\xi^\alpha = 0 \tag{24.15}$$

となる．ついでに (24.13) も計算すると

$$\mathcal{L}_\xi R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = -R^\tau{}_{\sigma\mu\nu}\nabla_\tau\xi^\rho + R^\rho{}_{\tau\mu\nu}\nabla_\sigma\xi^\tau + R^\rho{}_{\sigma\tau\nu}\nabla_\mu\xi^\tau$$
$$+ R^\rho{}_{\sigma\mu\tau}\nabla_\nu\xi^\tau + \xi^\tau\nabla_\tau R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} \tag{24.16}$$

となる．

motion が m 個のパラメーターに依存するときは

$$\Delta x^\mu(x, p) = \sum_{r=1}^{m} p_r \xi^\mu{}_{(r)}(x) \tag{24.17}$$

となる．おのおのの $\xi^\mu{}_{(r)}$ に対応してそれぞれ異なる Lie 微分が定義される．変位 (24.17) が motion であるための必要十分条件は各 r ($r = 1, 2, \cdots, m$) に対して

$$\nabla_\alpha\xi_{\beta(r)} + \nabla_\beta\xi_{\alpha(r)} = 0 \tag{24.18}$$

が成立することである．この式は $\xi_{(r)}$ について線形であるから，(24.18) の代りに無限小ベクトル $\Delta x^\mu(x, p)$ を使って

$$\nabla_\alpha \cdot \Delta x_\beta + \nabla_\beta \cdot \Delta x_\alpha = 0 \qquad (24.18)'$$

とかくこともできる．ここで $\Delta x_\alpha \overset{d}{\equiv} g_{\alpha\beta}\Delta x^\beta$ である．

(24.15), (24.16) からもわかるように Killing ベクトル ξ^μ (あるいは Δx^μ) は時空の曲率テンソルと密接な関係にある．したがって Killing ベクトルの存否，その性格をしらべることは時空の構造を研究するのに大きな手がかりとなる．もちろん，このような理論的な問題だけでなく具体的な問題を扱う際の Killing ベクトルの効用も忘れてはならない．たとえば，Killing ベクトルを手がかりに，特別に好都合な座標系の存在に気づき，これを用いて $g_{\mu\nu}$ を非常に簡単な形にかきくだすといったこともそのひとつといえよう．しかしそのような問題では，たいてい，われわれの "かん" の方がより以上に有効である．

さて，運動

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \Delta x^\mu(x, p)$$

が m 個のパラメーター p_r に依存する群をつくることがある．そのような群を**運動群**という．与えられた時空がどのような運動群をもつかということについては Petrov のくわしい研究がある．ある運動群が m 個のパラメーターに依存するとする．許される m の最大値は 10 である．このとき時空は最大限の対称性をもつことになる．最大値が 10 となる理由はつぎのように考えれば理解できよう．Killing の方程式 (24.18)′ を解いて Killing ベクトル Δx^μ を求める際に，任意の1点 $x_{(0)}$ における Δx^μ の値を与えれば (24.18)′ によって，その1階微係数の値もきまる．しかし (24.18)′ には $\partial_\alpha \Delta x_\beta + \partial_\beta \Delta x_\alpha$ という対称な組合せだけが含まれている．したがって $\partial_\alpha \Delta x_\beta - \partial_\beta \Delta x_\alpha$ という反対称の組合せ (これは6個の量である) については全く任意の値を与えることができる．したがって (24.18)′ の解は，点 $x_{(0)}$ における Δx^μ の "初期値" (これは4個の成分をもつ) とその点における $\partial_\alpha \Delta x_\beta - \partial_\beta \Delta x_\alpha$ という6個の値の関数となる．しかし (24.18)′ をつぎつぎに微分することにより (24.15) や (24.16) (の中の ξ を Δx におきかえた関係式) のような積分可能性を保証するための

条件式がうまれる．これらの中には一般に Δx に対する高階微係数が含まれる．そのような関係式は，Δx の高階微係数の値を順次それより低い階数の微係数の値でかき表わすのに役立つ．これらの式の中に場合によっては（いやむしろ多くの場合）反対称量 $\partial_\alpha \Delta x_\beta - \partial_\beta \Delta x_\alpha$ を点 $x_{(0)}$ における Δx^μ の値と結びつける関係式が含まれていることがある．また，ときには初期値 Δx^μ をすべて勝手に選ぶことを禁ずるような，Δx^μ 同士の間の束縛条件が含まれる場合もある．そのようなときには，独立なパラメーターの数は10より少くなる．

上の説明の最も簡単な例として平坦な時空を考えてみよう．このときは曲率テンソルは0となるから（24.16）は $0=0$ というわかりきったものとなる．もし Lorentz 座標系を用いれば，（24.15）は（ξ の代りに Δx とかくと）つぎのようになる：

$$\partial_\mu \partial_\nu \Delta x^\lambda = 0. \tag{24.19}$$

この解は

$$\Delta x^\lambda = \epsilon^\lambda{}_\tau x^\tau + \theta^\lambda \tag{24.20}$$

である．ϵ，θ は積分定数である．これを Killing の方程式（24.18）′に代入すると

$$\eta_{\lambda\sigma}\epsilon^\sigma{}_\tau \overset{d}{\equiv} \epsilon_{\lambda\tau} = -\epsilon_{\tau\lambda} \tag{24.21}$$

となる．したがってこの場合には

$$x^\mu \to x^\mu + \epsilon^\mu{}_\nu x^\nu + \theta^\mu \tag{24.22}$$

という10個のパラメーターに依存した motion が存在する．（24.22）は非斉次無限小 Lorentz 変換と全く同じ形をした点変換である．この例ではパラメーターの数が最大となっている．したがって平坦な時空，つまり Minkowski 空間は最も対称性の高い4次元空間であるということになる．

上に述べたことの逆，つまり運動群があたえられているとき，それを許すような時空にはどのようなものがあるかという問題はむずかしくてほとんど研究されていない．これで時空の対称性に関する話はうちきる．

第5章　不変変分論

§25. 作用積分を不変にする変分

これからしばらく一般相対論から離れて，まず Noether の定理について述べる．つづいてこの定理の応用として種々の保存則や，§15，あるいは§23 にでてきた恒等式

$$\nabla_\mu \boldsymbol{G}^{\mu\nu} \equiv 0, \tag{25.1}$$

$$\boldsymbol{G}^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \sqrt{-g}\, G^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \sqrt{-g}\left\{R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R\right\}$$

を導き出してみよう．

まず，時空内の部分域 Ω のなかの各点には座標 $x^\mu(\mu = 0, 1, 2, 3)$ が与えられているとする．時空とよばれる連続体内でどのような距離の定義が成り立つかはどうでもよい．たとえばこれから扱う問題が特殊相対論のワクのなかに属するものならば，時空を Minkowski 空間とみなせばよい．

さて，Ω 内には N 個の成分をもつ場 $\varphi_A(x)$ が与えられているものとする．$A(=1, 2, \cdots, N)$ はこの成分を識別する添字である．しかし φ_A をテンソル場に限る必要はない．たとえば特殊相対論にでてくるスピノール場でもよい．また，これは必ずしも一種類の場を表わすとは限らない．2種類以上の場（たとえば，電磁ポテンシャルを表わすベクトル場と電子場を表わすスピノール場）を一緒にして通し番号をつけたものが φ_A（A は通し番号）であると考えて差しつかえない．もし時空を一般相対論的に扱うときは，その計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ も $\varphi_A(x)$ のなかに組み入れるものとする．

さきにも注意したように Ω の幾何学的性質はどんなものでもよいが，この中の点は一意的に，また連続的に座標づけされているものとし，特に x^0 を時間座標，x^k（$k = 1, 2, 3$）を空間座標とよぶことにする．しかし計量を具体的に与えてない以上，この呼び名は単なる便宜上のものにすぎない．しかし計量

$g_{\mu\nu}$（あるいは $\eta_{\mu\nu}$）が与えられているときは，x^0 軸（つまり x^k を固定して x^0 だけを変化させることにより描かれる曲線）の接線ベクトルはどこででも時間的とする．

さて，場 $\varphi_A(x)$ の振舞は場の方程式とよばれる N 個の連立偏微分方程式により決められる．一般に場の方程式は Hamilton の原理に従い Lagrange 関数 L から変分法により導かれる．

いま，Lagrange 関数

$$L\{\varphi_A(x),\ \varphi_{A,\mu}(x)\} \tag{25.2}$$

が与えられているとする．ここで

$$\varphi_{A,\mu} \overset{d}{\equiv} \frac{\partial \varphi_A}{\partial x^\mu}$$

である．(25.2) に対応する場の方程式は Hamilton の原理によれば，作用積分

$$I \overset{d}{\equiv} \int_\Omega L(\varphi_A,\ \varphi_{A,\mu})d^4x \tag{25.3}$$

の φ_A に関する変分を 0 とおくことにより求まる．すなわち，(25.2) の L から導かれる Euler の方程式

$$[L]^A \overset{d}{\equiv} \frac{\partial L}{\partial \varphi_A} - \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\mu}}\right) = 0 \qquad (A = 1,\ 2,\ \cdots,\ N) \tag{25.4}$$

が場の方程式である．

さて，I は $\varphi_A(x)$ の汎関数である．この $\varphi_A(x)$ を他の関数 $\varphi_A'(x)$ に変換したり，あるいは座標変換 $x^\mu \to x^{\mu\prime}$ を行った際に，I の値が不変な場合がある．そのようなときは，ある種の物理量に対して保存則が成立したり，あるいは恒等式が存在する．このような問題を一般的に扱う数学の一部門が**不変変分論**である．これについて特にくわしい研究を行なったのは Noether* である．

いま，無限小座標変換

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} \overset{d}{\equiv} x^\mu + \delta x^\mu \tag{25.5}$$

を考えよう．ここで座標が x^μ という点の座標変換後の新座標が $x^{\mu\prime}$ である．

---

* E. Noether: Gött. Nachr. (1918) 235.

これと同時に場の量 $\varphi_A(x)$ も

$$\varphi_A(x) \to \varphi_A{}'(x') \overset{d}{\equiv} \varphi_A(x) + \delta\varphi_A(x) \qquad (25.6)$$

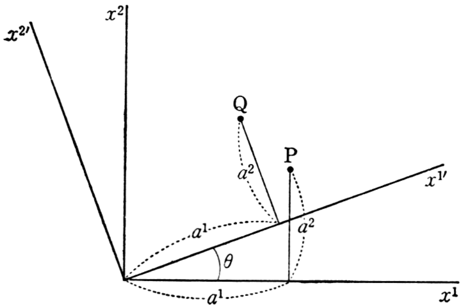
のように変換されたとする．(25.6) の点 x と点 x' とは同一の世界点である．いま δx^μ, $\delta\varphi_A$ はいずれも同じ程度の無限小量とし，今後これらの量の2次以上の量はすべて無視することにする．

さて，Lie 微分を定義したときと同様につぎのような無限小変分を考える：

$$\bar{\delta}\varphi_A(x = a) \overset{d}{\equiv} \varphi_A{}'(x' = a) - \varphi_A(x = a). \qquad (25.7)$$

(25.6) で定義された変分 $\delta\varphi_A$ は同一の世界点における場の量の新旧の値の差を表わす．一方，任意の1対の点を P, Q とする．ただし，P の旧座標 $x^\mu = a^\mu$ と Q の新座標 $x^{\mu\prime}(= a^\mu)$ の値とは等しいとする．このとき $\bar{\delta}\varphi_A(a)$ はつぎのようになる：

$$\bar{\delta}\varphi_A(a) \overset{d}{\equiv} \varphi_A{}'(Q) - \varphi_A(P). \qquad (25.7)'$$



第 9 図

(**第9図** 参照)．ここで話をわかりやすくするために2次元 Euclid 空間における直交座標軸の無限小回転を考えよう．この場合の点 P, Q を図示したものが第9図である．

さて，$\bar{\delta}\varphi_A$ と $\delta\varphi_A$ の間にはつぎの関係がある：

$$\delta\varphi_A(x) = \bar{\delta}\varphi_A(x) + \varphi_{A,\mu}\delta x^\mu. \qquad (25.8)$$

これは (25.6), (25.7) から容易にわかる．$\bar{\delta}\varphi_A$ の便利な点は，Lie 微分の説明の際にも述べたように変分 $\bar{\delta}$ と微分との順序が交換できるということである．すなわち

$$\delta\left(\frac{\partial\varphi_A}{\partial x^\mu}\right) = \frac{\partial\varphi_A{}'(x')}{\partial x^{\mu\prime}} - \frac{\partial\varphi_A(x)}{\partial x^\mu}$$

$$= \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu\prime}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Big\{\varphi_A(x) + \delta\varphi_A(x)\Big\} - \varphi_{A,\mu}$$

$$= (\delta^\nu{}_\mu - \partial_\mu \delta x^\nu)\{\varphi_{A,\nu} + \partial_\nu \delta\varphi_A\} - \varphi_{A,\mu}.$$

δ の1次までの近似で

$$= \partial_\mu(\delta\varphi_A) - \partial_\mu \delta x^\nu \cdot \varphi_{A,\nu}.$$

この両辺の $\delta\varphi_A$ を (25.8) によって $\bar{\delta}\varphi_A$ でかき表わすと

$$\bar{\delta}\left(\frac{\partial\varphi_A}{\partial x^\mu}\right) + \varphi_{A,\mu\nu}\delta x^\nu = \partial_\mu(\bar{\delta}\varphi_A + \varphi_{A,\nu}\delta x^\nu) - \partial_\mu \delta x^\nu \cdot \varphi_{A,\nu}.$$

そこで

$$\bar{\delta}\left(\frac{\partial\varphi_A}{\partial x^\mu}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\bar{\delta}\varphi_A). \tag{25.9}$$

一般に φ_A やその微分の任意の関数 $F(\varphi_A, \varphi_{A,\mu})$ について

$$\bar{\delta}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}F\right) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\bar{\delta}F) \tag{25.9$'$}$$

が成立することが容易に証明できる.

さて, 変換 (25.5) および (25.6) を同時に行なった際に I が不変とする. したがって

$$\delta I \overset{d}{\equiv} I' - I = \int_\Omega L\left\{\varphi_A{}'(x'), \varphi_{A,\mu}{}'(x')\right\} d^4x' - \int_\Omega L\left\{\varphi_A(x), \varphi_{A,\mu}(x)\right\} d^4x$$
$$= 0. \tag{25.10}$$

ここで I', および I の積分域はいずれも同じ Ω である. ただし数値的には x' の積分域は x のそれと異なる. たとえば x の積分域が $a \leqq x \leqq b$ ならば x' は $a + \delta x(a) < x' < b + \delta x(b)$ となる.

(25.10) の右辺の第1積分に (25.5), (25.6) を代入し, すべてを変換前の量でかくと

$$\delta I = \int_\Omega \left[L\left\{\varphi_A(x) + \delta\varphi_A, \varphi_{A,\mu}(x) + \delta\varphi_{A,\mu}(x)\right\} \frac{\partial(x')}{\partial(x)} - L\{\varphi_A(x), \varphi_{A,\mu}(x)\}\right] d^4x$$

となる. 関数行列式 $\partial(x')/\partial(x)$ は δ の1次までの近似では

$$\frac{\partial(x')}{\partial(x)} = 1 + \frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\mu}$$

となる. そこで δI を δ の1次までの近似でかくと

$$\delta I = \int_\Omega \left\{ \frac{\partial L}{\partial \varphi_A} \delta\varphi_A + \frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\mu}} \delta\varphi_{A,\mu} + L \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu} \right\} d^4 x. \qquad (25.11)$$

ここで，また今後も，同じ添字が同一の項の中で，上下2か所にでてきたときは，その添字の示す数域にわたって和をとるものと約束する．たとえば上の式の右辺第2項では，μ については $0 \sim 3$ まで，また A については $1 \sim N$ まで和をとるものとする．

もし L が，φ_A, $\varphi_{A,\mu}$ だけでなく，x^μ にもあらわに依存するときは上の式は

$$\delta I = \int_\Omega \left\{ \frac{\partial L}{\partial \varphi_A} \delta\varphi_A + \frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\mu}} \delta\varphi_{A,\mu} + \frac{\mathring{\partial} L}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + L \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu} \right\} d^4 x \qquad (25.11)'$$

となる．この右辺の第3項は L の中にあらわに顔をだしている x^μ についての微分を示す．これからはより一般的な (25.11)′ について議論する．この式の中の δ を，公式 (25.8) により $\bar{\delta}$ でかきかえると，(25.11)′ は

$$\delta I = \int_\Omega \left\{ \frac{\partial L}{\partial \varphi_A} \bar{\delta}\varphi_A + \frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\mu}} \partial_\mu \bar{\delta}\varphi_A + \frac{\partial}{\partial x^\mu}(L \delta x^\mu) \right\} d^4 x \qquad (25.11)''$$

となる．ただし

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}(L\delta x^\mu) = \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_A} \varphi_{A,\mu} + \frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\nu}} \varphi_{A,\nu\mu} + \frac{\mathring{\partial} L}{\partial x^\mu} \right) \delta x^\mu + L \partial_\mu \delta x^\mu$$

という関係式を用いた．

(25.11)″ は部分積分によりつぎのように変形される：

$$\delta I = \int_\Omega \left\{ [L]^A \bar{\delta}\varphi_A + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\mu}} \delta\varphi_A - T^\mu{}_\nu \delta x^\nu \right) \right\} d^4 x. \qquad (25.12)$$

ここで $[L]^A$ は (25.4) に，その定義が与えられている．また $T^\mu{}_\nu$ は

$$T^\mu{}_\nu \overset{d}{\equiv} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\mu}} \varphi_{A,\nu} - \delta^\mu{}_\nu L \qquad (25.13)$$

である．これは場 φ_A の**正準エネルギー・テンソル密度**とよばれる．*

さて，I が不変という要請から，結局

---

* この章では $T^\mu{}_\nu$ は (25.13) を表わす．これは第4章にでてきた物質の対称エネルギー・テンソルと同じ記号であるが，全く別のものである．この点はまことに具合が悪いが混同しないよう注意されたい．なお物質系の対称エネルギー・テンソルは，この章では特に $M^{\mu\nu}$ で表わす（§29参照）．

$$\int_\Omega \left\{[L]^A \bar{\delta}\varphi_A + \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\mu}}\,\delta\varphi_A - T^\mu{}_\nu \delta x^\nu\right)\right\} d^4x \equiv 0 \qquad (25.14)$$

という結果が導かれる．(25.14) は，φ_A がどんな関数であろうとも，つまり場の方程式 (25.4) の解であろうがなかろうが，また積分域 Ω がどんなものであろうとも，それらに関係なく成立する．したがってこれは恒等式である．

つぎの節以降では，変換 (25.5)，(25.6) をより具体化した場合に，(25.14) からどのような結論が導かれるかについて詳述する．

§26.　Noether の第1定理

さてこれから §25 に述べた変換として，それが特に n 個のパラメーター ϵ^r に依存する場合を考えよう．すなわち

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &\overset{d}{\equiv} \epsilon^r X^\mu{}_r(x), \\ \delta\varphi_A &\overset{d}{\equiv} \epsilon^r M_{r,A}{}^B \cdot \varphi_B\,. \end{aligned} \qquad (26.1)$$

ここで ϵ^r の添字 r については，約束により1から n までの和をとるものとする．なお今後は ϵ^r は無限小のパラメーターとし，すべての計算は ϵ^r の1次までの近似にとどめることにする．$M_{r,A}{}^B$ は n 個の $N\times N$ 行列 $\boldsymbol{M}_r$ $(r=1, 2, \cdots, n)$ の (A, B) 要素を示す：

$$(\boldsymbol{M}_r)_{AB} \overset{d}{\equiv} M_{r,A}{}^B\,.$$

これは一般には x の関数としてかまわない．しかし簡単のために φ には無関係とする．つまり変換 (26.1) は φ の無限小線形変換を示す．

さて，§25 で導いた恒等式 (25.14) は積分域 Ω の位置や大きさに関係なく成立する．そこで任意の1点 x をかこむ無限小の Ω をとるとき，$\delta I\equiv 0$ となるためには (25.14) の被積分関数自身が0とならねばならない．つまり

$$[L]^A \bar{\delta}\varphi_A + \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\mu}}\,\delta\varphi_A - T^\mu{}_\nu \cdot \delta x^\nu\right) \equiv 0. \qquad (26.2)$$

これは任意の点 x において，また φ_A がどんなものであろうとも成立する恒等式である．これに (26.1) を代入すると，ϵ^r の係数がそれぞれ $\equiv 0$ となる．すなわち

$$-[L]^A\{M_{r,A}{}^B\varphi_B-\varphi_{A,\mu}X^\mu{}_r\}\equiv\partial_\mu\left\{\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\mu}}M_{r,A}{}^B\cdot\varphi_B-T^\mu{}_\nu\cdot X^\nu{}_r\right\}$$

$$(r=1,\,2,\,\cdots,\,n). \tag{26.3}$$

いま，場の方程式

$$[L]^A\overset{d}{\equiv}\frac{\partial L}{\partial\varphi_A}-\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\mu}}\right)=0 \tag{26.4}$$

を（26.3）に代入すると n 個の保存則

$$\partial_\mu\left\{\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\mu}}M_{r,A}{}^B\cdot\varphi_B-T^\mu{}_\nu\cdot X^\nu{}_r\right\}=0 \tag{26.5}$$

が導かれる．ここで記号の約束をしておこう．（26.5）のように場の方程式（26.4）のおかげで成り立つ等式は $=$ で表わす．これに対して φ_A がどんなものであろうとも成立する恒等式は $\equiv$ で表わすことにする．

（26.5）に§12の議論を適用すると $x^0=$一定 という超曲面上の積分

$$J_r\overset{d}{\equiv}\int J_r{}^0(x)d^3x \qquad (r=1,\,2,\,\cdots,\,n) \tag{26.6}$$

は x^0 によらず，一定の値をもつ．ここで

$$J_r{}^\mu\overset{d}{\equiv}\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\mu}}M_{r,A}{}^B\cdot\varphi_B-T^\mu{}_\nu\cdot X^\nu{}_r \tag{26.7}$$

は n 個の“**流れの密度**”を表わす．このように n 個のパラメーターに依存する変換（26.1）に対して作用積分 I が不変のときは（26.6）のような n 個の保存量が存在する．また I が（26.1）に対して不変であるための必要十分条件は恒等式（26.3）が成立することである．これを今後は **Noether の第1定理** とよぶことにしよう．以下にこの定理の 2, 3 の応用例をあげよう．

（a） エネルギー・運動量の保存則

（26.1）の特別な場合として座標軸の並進

$$x^\mu\to x^{\mu\prime}=x^\mu+\epsilon^\mu \tag{26.8}$$

を考えよう．ϵ^μ は x に無関係な4個の無限小パラメーターである．一般に $\varphi_A(x)$ がテンソルでもスピノールでも，座標軸の並進に対しては，$\varphi_A(x)$ は不変である．すなわち

$$\delta\varphi_A=\varphi_A{}'(x')-\varphi_A(x)=0. \tag{26.9}$$

そこで，I の変化は

$$\delta I=\int L\Big\{\varphi_A{}'(x'),\ \varphi_{A,\mu}{}'(x'),\ x'\Big\}d^4x'-\int L\Big\{\varphi_A(x),\ \varphi_{A,\mu}(x),\ x\Big\}d^4x$$
$$=\int\Big[L\Big\{\varphi_A(x),\ \varphi_{A,\mu}(x),\ x+\epsilon\Big\}-L\Big\{\varphi_A(x),\ \varphi_{A,\mu}(x),\ x\Big\}\Big]d^4x$$
$$=\int\frac{\mathring{\partial} L}{\partial x^\mu}\epsilon^\mu d^4x. \qquad (26.10)$$

一方, δI は一般に（25.12）のようにもかき表わされる．ただし（26.8)，(26.9)の場合には，$\bar{\delta}\varphi_A$ は

$$\bar{\delta}\varphi_A=-\varphi_{A,\mu}\epsilon^\mu$$

である．そこで（25.12）の右辺と（26.10）から

$$-[L]^A\varphi_{A,\mu}-\partial_\lambda T^\lambda{}_\mu\equiv\frac{\mathring{\partial} L}{\partial x^\mu} \qquad (26.11)$$

となる．

もし場の方程式（26.4）を使うと

$$\partial_\lambda T^\lambda{}_\mu=-\frac{\mathring{\partial} L}{\partial x^\mu}. \qquad (26.12)$$

特に L が x^μ にあらわに依存しないときは $\mathring{\partial} L/\partial x=0$ となるから（26.10）は $\delta I=0$，すなわち I は不変となる．また（26.12）は

$$\partial_\lambda T^\lambda{}_\mu=0 \qquad (26.12)'$$

となる．したがって（26.6）に対応して

$$J_\mu\overset{d}{\equiv}\int T^0{}_\mu d^3x=一定 \qquad (26.13)$$

となる．すなわち，パラメーター ϵ^μ と同じ個数の保存量 J_μ が導かれた．J_μ のうち cJ_0 は場 φ_A の全エネルギーを示し，$-J_k$ は全運動量を示す．この解釈の妥当であることは，たとえば L として電磁場の Lagrange 関数を用いて実際に J_μ を計算してみれば容易にわかる．したがって（26.13）はエネルギー・運動量の保存則にほかならない．上の証明から明らかなように，この保存則は座標軸の並進に対する I の不変性，つまり I の時空的一様性にもとづく．

(b) Lorentz 不変性と角運動量の保存則

作用積分 I が Lorentz 変換

$$\left.\begin{aligned} x^\mu &\to x^{\mu\prime} = x^\mu + \epsilon^\mu{}_\nu \cdot x^\nu \\ \varphi_A(x) &\to \varphi_A{}'(x') = \varphi_A(x) + \frac{1}{2}\epsilon^{\rho\sigma}(M_{\rho\sigma})_A{}^B \cdot \varphi_B \end{aligned}\right\} \tag{26.14}$$

に対して不変とする．ここで無限小パラメーター $\epsilon^\mu{}_\nu$ は

$$\epsilon^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \epsilon^\mu{}_\rho \eta^{\rho\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}$$

である．すなわち一般論のパラメーター ϵ^r に該当するものはここでは 6 個のパラメーター $\epsilon^{\mu\nu}$ である．なおこの例では，テンソルの添字の上げ下ろしは，Minkowski 空間の計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$, $\eta^{\mu\nu}$ により行なうものとする．

(26.14) の右辺にでてきた係数 $(M_{\mu\nu})_A{}^B$ は場 φ_A の Lorentz 変換を規定する大事な係数である．たとえば，φ_A がベクトル φ_μ のときは

$$\begin{aligned} \varphi_\mu{}'(x') &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu\prime}}\varphi_\nu(x) = \varphi_\mu(x) - \epsilon^\nu{}_\mu \varphi_\nu \\ &= \varphi_\mu + \frac{1}{2}\epsilon^{\rho\sigma}\{-\delta^\nu{}_\rho \eta_{\sigma\mu} + \delta^\nu{}_\sigma \eta_{\rho\mu}\}\varphi_\nu . \end{aligned}$$

したがって

$$(M_{\rho\sigma})_\mu{}^\nu = -\delta^\nu{}_\rho \eta_{\sigma\mu} + \delta^\nu{}_\sigma \eta_{\rho\mu} = -(M_{\sigma\rho})_\mu{}^\nu . \tag{26.15}$$

x^μ の変換則も一般論にそった形式にかき表わすことができる：

$$\delta x^\mu = x^{\mu\prime} - x^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\rho\sigma}(\delta^\mu{}_\rho \eta_{\sigma\nu} - \delta^\mu{}_\sigma \delta_{\rho\nu})x^\nu .$$

すなわち一般論の $X^\mu{}_r$ の代りに

$$\left.\begin{aligned} \delta x^\mu &= \frac{1}{2}\epsilon^{\rho\sigma} X^\mu{}_{\rho\sigma} , \\ X^\mu{}_{\rho\sigma} &\overset{d}{\equiv} \delta^\mu{}_\rho x_\sigma - \delta^\mu{}_\sigma x_\rho , \quad x_\rho \equiv \eta_{\rho\nu} x^\nu \end{aligned}\right\} \tag{26.16}$$

となる．

そこで場の方程式を使うと，保存則は

$$\partial_\mu R_{\rho\sigma}{}^\mu = 0, \tag{26.17}$$

$R_{\rho\sigma}{}^\mu$ は

$$R_{\sigma\rho}{}^{\mu} \overset{d}{\equiv} -R_{\rho\sigma}{}^{\mu} \overset{d}{\equiv} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\mu}}(M_{\rho\sigma})_{A}{}^{B}\cdot\varphi_{B} - (T^{\mu}{}_{\rho}x_{\sigma} - T^{\mu}{}_{\sigma}x_{\rho}). \quad (26.18)$$

ここでは一般論の $J_{r}{}^{\mu}$ の代りに $R_{\sigma\rho}{}^{\mu}$ という記号を用いた．(26.17) から6個の保存量

$$R_{\rho\sigma} = -R_{\sigma\rho} \overset{d}{\equiv} \int R_{\rho\sigma}{}^{0}\, d^3x$$

が導かれる．特に，(ρ, σ) として1, 2, 3のいずれかをとると

$$R_{ik} = -R_{ki} = \int\left\{-\frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,0}}(M_{ik})_{A}{}^{B}\cdot\varphi_{B} + (T^{0}{}_{i}\cdot x^{k} - T^{0}{}_{k}\cdot x^{i})\right\}d^3x \quad (26.18)'$$

となる $(i, k = 1, 2, 3)$．これは場 φ_A の **全角運動量** を示す．この第2，第3項は場 φ_A の並進運動にもとづく角運動量，つまり **軌道角運動量** を示す．なぜならば

$$x^{i}\{-T^{0}{}_{k}(x)\}d^3x - x^{k}\{-T^{0}{}_{i}(x)\}d^3x$$

は，点 $\vec{x}$ にある，体積が d^3x という小領域内にある場 φ_A のもつ運動量 $(-T^{0}{}_{k})d^3x$ の座標原点に対する能率を示すからである．

(26.18)′ の第1項は φ_A のもつ **スピン角運動量** とよばれる．これは Lorentz 変換 [(26.18)′ の場合には，3次元空間回転] に対する φ_A の変換性，つまり行列 $\boldsymbol{M}_{ik}$ によりきまる量である．

さて，(25.13) で定義された正準エネルギー・テンソル密度 $T^{\mu}{}_{\nu}$ については，一般に

$$T^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} T^{\mu}{}_{\rho}\eta^{\rho\nu} \neq T^{\nu\mu}$$

である．これに対して (20.7)″ で定義されたエネルギー・テンソル密度は μ, ν について対称である．このようにわれわれは2通りの定義を知っている．対称でない正準エネルギー・テンソルから対称なエネルギー・テンソルを作る際に，上述のスピン角運動量密度は大事な役目をする．これら2種類のエネルギー・テンソルの関係には，なかなか面白いことがあるが，これについて詳述することは一般相対論の本筋から逸脱しすぎるのでページ数の関係で断念する．

(c) 位相変換と電荷の保存則

電荷をもった場 φ_A が電磁場 A_μ と相互作用している場合を考えよう．いま，φ_A は x の複素関数とし，これに複素共役な量を φ^{*A} とかくことにする．簡単のために重力場は無視し，特殊相対論の範囲内で問題を考えよう．この物理系の Lagrange 関数は

$$L = -\frac{1}{4c\mu_0} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - \frac{1}{c}(\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi^{*A}\cdot(\partial_\nu - ieA_\nu)\varphi_A \eta^{\mu\nu} - \frac{1}{c} m^2 \varphi^{*A}\varphi_A . \tag{26.19}$$

ここで

$$f_{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \qquad f^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} f_{\alpha\beta} .$$

m は定数で，これは φ_A 場を量子化したときの φ-量子の質量を示す．また e は φ-量子のもつ電荷に相当する．

(26.19) は変換

$$\left.\begin{aligned} &\delta x^\mu = 0, \qquad \delta A_\mu = 0 \\ &\delta\varphi_A = \bar{\delta}\varphi_A \overset{d}{\equiv} \varphi_A{}'(x) - \varphi_A(x) = e^{i\epsilon}\varphi_A - \varphi_A \approx i\epsilon\varphi_A \\ &\delta\varphi^{*A} = \bar{\delta}\varphi^{*A} \overset{d}{\equiv} e^{-i\epsilon}\varphi^{*A} - \varphi^{*A} \approx -i\epsilon\varphi^{*A} \end{aligned}\right\} \tag{26.20}$$

に対して不変である．ここで ϵ は無限小パラメーターである．(26.20) を φ_A の（無限小）**位相変換**という．(26.20) はただ1個のパラメーターを含む変換である．したがってただ1個の保存則が存在する．すなわち

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \tag{26.21}$$

ここで

$$\begin{aligned} J^\mu &\overset{d}{\equiv} -ec\left\{\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\mu}} i\varphi_A + \frac{\partial L}{\partial\varphi^{*A}{}_{,\mu}}(-i)\varphi^{*A}\right\} \\ &= ie\eta^{\mu\nu}\{(\partial_\nu + ieA_\nu)\varphi^{*A}\cdot\varphi_A - \varphi^{*A}\cdot(\partial_\nu - ieA_\nu)\varphi_A\}. \end{aligned} \tag{26.22}$$

(26.21) から

$$Q = \int J^0 d^3x$$

は保存量である．

ここで電磁場の方程式を求めてみよう．それには（26.19）の A_μ に対する変分を計算すればよい．すなわち

$$-\frac{1}{\mu_0 c}\partial_\nu f^{\mu\nu}-\frac{ie}{c}\{\varphi^{*A}\cdot(\partial_\nu-ieA_\nu)\varphi_A-(\partial_\nu+ieA_\nu)\varphi^{*A}\cdot\varphi_A\}\eta^{\mu\nu}=0.$$

あるいは（26.22）を使うと

$$\partial_\nu f^{\mu\nu}=\mu_0 J^\mu. \tag{26.23}$$

これは Maxwell の方程式（19.8）（ただし重力場を無視したもの）にほかならない．この式から（26.22）で定義した J^μ が φ_A の作る電流密度であることがわかる．したがって Q は φ_A 場の全電気量に相当し，（26.21）は**電流の連続方程式**を示す．

ここでひとつ注目すべきことがある．保存則（26.21）は，一般論によれば恒等式

$$-[L]^{*A}\delta\varphi_A-[L]_A\cdot\delta\varphi^{*A}$$
$$\equiv\partial_\mu\left\{\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\mu}}\delta\varphi_A+\frac{\partial L}{\partial\varphi^{*A}{}_{,\mu}}\delta\varphi^{*A}\right\}=-\frac{\epsilon}{ce}\partial_\mu J^\mu$$

に φ－場の方程式

$$\left.\begin{aligned}[L]^{*A}&\overset{d}{\equiv}\frac{\partial L}{\partial\varphi_A}-\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\mu}}\right)=0,\\ [L]_A&\overset{d}{\equiv}\frac{\partial L}{\partial\varphi^{*A}}-\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi^{*A}{}_{,\mu}}\right)=0\end{aligned}\right\} \tag{26.24}$$

を用いて導かれた．しかしそれは，また電磁場の方程式（26.23）に ∂_μ を掛けても導くことができる．つまり（26.21）は（26.24）および（26.23）という2組の方程式のいずれからも導くことができる．換言すれば，場の方程式（26.23）と（26.24）の間にはある恒等式が存在することを暗示している．この事情は，物質系と相互作用している重力場について§23に述べた事とよく似ている．つまり§23の $T^{\mu\nu}$ に関する事情と上述の J^μ のそれとが互いに酷似している．これに関するくわしい考察はつぎの節にゆずる．

§27. Noether の第2定理

変換（25.5），（25.6）として

$$\left.\begin{aligned}\delta x^{\mu} &\overset{d}{\equiv} \sum_{r=1}^{n} \lambda^{r}(x)\cdot X^{\mu}{}_{r}(x),\\ \delta\varphi_{A} &\overset{d}{\equiv} \lambda^{r}(x)\cdot M_{r,A} + \lambda^{r}(x)_{,\mu}\cdot N_{r}{}^{\mu}{}_{,A}\end{aligned}\right\} \tag{27.1}$$

を考えよう．$\lambda^{r}(x)$（$r=1,2,\cdots,n$）は x の任意関数である．ここでは λ^{r} はすべて無限小量とし，計算はすべて λ^{r} の1次までにとどめる．$\lambda^{r}{}_{,\mu}$ は $\partial\lambda^{r}/\partial x^{\mu}$ を表わす．また $M_{r,A}$，$N_{r}{}^{\mu}{}_{,A}$ はいずれも x の関数で，また $\delta\varphi_{A}(x)$ と同じ点の φ に依存するとしてよい．しかし $X^{\mu}{}_{r}$ は x だけの関数とする．X, M, N はすべて与えられているものとする．

さて，作用積分 I が変換（27.1）に対して不変としよう．そのようなときは一般論の（25.14）に（27.1）を代入した恒等式が成り立つ．いまこの第1項を部分積分法によりかき直すと（25.14）はつぎのようになる：

$$\int_{\Omega}\Biggl[\lambda^{r}\Bigl\{[L]^{A}(M_{r,A}-\varphi_{A,\mu}X^{\mu}{}_{r})-\partial_{\mu}([L]^{A}N_{r}{}^{\mu}{}_{,A})\Bigr\} + \partial_{\mu}\Bigl\{\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\mu}}\delta\varphi_{A}-T^{\mu}{}_{\nu}\delta x^{\nu}+[L]^{A}N_{r}{}^{\mu}{}_{,A}\lambda^{r}\Bigr\}\Biggr]d^{4}x \equiv 0. \tag{27.2}$$

ここで Ω は時空のなかのどのような位置にあってもよいし，またどのような大きさでもよい．したがって（27.2）の被積分関数自身が $\equiv 0$ でなければならない．すなわち

$$\lambda^{r}\{\cdots\} + \partial_{\mu}\{\cdots\} \equiv 0. \tag{27.3}$$

一方，（27.2）において，任意関数 λ^{r} およびその1階微分が Ω の表面のいたるところで0となるものとすれば（27.2）の第1項だけが残り，それは

$$\int_{\Omega}\lambda^{r}\{\cdots\}d^{4}x \equiv 0 \tag{27.2$'$}$$

となる．（27.2)$'$ は任意の領域 Ω に対し，また Ω の表面上では0となるが，Ω の内部では全く任意の値をとりうる関数 λ^{r} に対して成立する恒等式である．そのためには（27.2)$'$ の被積分関数の λ^{r} をはずしたものが $\equiv 0$ とならねばならない：

$$[L]^A(M_{r,A}-\varphi_{A,\mu}X^\mu{}_r)-\partial_\mu([L]^A N_r{}^\mu{}_{,A})\equiv 0. \tag{27.4}$$

これを (27.3) に代入すると，もう一組の恒等式

$$\partial_\mu\left\{\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\mu}}\delta\varphi_A - T^\mu{}_\nu\delta x^\nu + [L]^A N_r{}^\mu{}_{,A}\lambda^r\right\}\equiv 0 \tag{27.5}$$

も成り立つ．つまり (27.3) は (27.4) および (27.5) の2組に分かれる．

(27.5) にはまだ任意関数 λ^r が含まれている．すなわち，これは

$$\partial_\mu\{B^\mu{}_r\cdot\lambda^r + C^{\mu\nu}{}_r\cdot\lambda^r{}_{,\nu}\}\equiv 0 \tag{27.5)$'$}$$

という形にかくことができる．ここで

$$\left.\begin{aligned} B^\mu{}_r &\overset{d}{\equiv} \frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\mu}}M_{r,A} - T^\mu{}_\nu\cdot X^\nu{}_r + [L]^A N_r{}^\mu{}_{,A}, \\ C^{\mu\nu}{}_r &\overset{d}{\equiv} \frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\mu}}N_r{}^\nu{}_{,A}. \end{aligned}\right\} \tag{27.6}$$

(27.5)′ の微分を計算すると

$$\lambda^r\cdot\partial_\mu B^\mu{}_r + \lambda^r{}_{,\mu}\{B^\mu{}_{,r}+\partial_\nu C^{\nu\mu}{}_r\} + \lambda^r{}_{,\mu\nu}C^{\mu\nu}{}_r\equiv 0. \tag{27.5)$''$}$$

λ^r およびその微分の値は全く勝手に，また互いに独立に採りうるから，(27.5)″ が成立するためには，λ^r の各係数がそれぞれ恒等的に0となる必要がある．そこで (27.5) からつぎの3組の恒等式が導かれる：

$$\partial_\mu B^\mu{}_r\equiv 0, \tag{27.7}$$

$$B^\mu{}_r + \partial_\nu C^{\nu\mu}{}_r\equiv 0, \tag{27.8}$$

$$C^{\mu\nu}{}_r + C^{\nu\mu}{}_r\equiv 0. \tag{27.9}$$

結局，恒等式 (27.2) から4組の恒等式 (27.4), (27.7), (27.8), (27.9) が導かれた． これらの恒等式は I が変換 (27.1) に対して不変であるための必要条件であるが，同時にまたこれらは十分条件であることも容易にわかるであろう．I が変換 (27.1) に対して不変のとき，これらの恒等式が成り立つことを **Noether の 第2定 理** と呼ぶことにしよう．

さてこれから上に導いた恒等式の意味について考えてみよう． まず (27.4) は N 個の場の方程式

$$[L]^A=0 \qquad A=1,2,\cdots,N \tag{27.10}$$

の間に n 個の恒等式が存在することを示す． したがって真に独立な方程式の

数は $N-n$ 個である．つまり N 個の未知量 φ_A を決定するには方程式が n 個たりない．そこで，場の方程式 (27.10) を解くと，その答には不定関数が n 個含まれることになる．これをもう少し詳細に説明しよう．

まず，変換 (27.1) に対して I は不変であるから

$$I' \overset{d}{\equiv} \int_\Omega L\left\{\varphi_A'(x'),\ \varphi_A'(x')_{,\mu}\right\} d^4x' \equiv \int_\Omega L\left\{\varphi_A(x),\ \varphi_{A,\mu}\right\} d^4x$$

$$\overset{d}{\equiv} I.$$

変分法により場の方程式を導くために

$$\varphi_A(x) \to \varphi_A(x) + \Delta\varphi_A(x) \tag{27.11}$$

という変分を考える．ただし $\Delta\varphi_A$ は Ω の表面上では 0 になるものとする．(27.11) に応じて $\varphi_A'(x')$ も

$$\varphi_A'(x') \to \varphi_A'(x') + \Delta\varphi_A'(x') \tag{27.11$'$}$$

という変分をこうむる．ここで

$$\Delta\varphi_A'(x') = \frac{\partial\varphi_A'(x')}{\partial\varphi_B(x)}\Delta\varphi_B(x)$$

$$= \Delta\varphi_A(x) + \frac{\partial\delta\varphi_A(x)}{\partial\varphi_B(x)}\Delta\varphi_B(x)$$

という関係がある．

この変分に対して

$$\Delta I' = \int_\Omega [L\{\varphi'(x')\}]^A \cdot \Delta\varphi_A'(x') d^4x' \equiv \int_\Omega [L\{\varphi(x)\}]^B \cdot \Delta\varphi_B(x) d^4x$$

$$= \Delta I.$$

この第1番目の積分を ′ のない量を用いてかくと

$$\int_\Omega [L\{\varphi'(x')\}]^A \frac{\partial\varphi_A'(x')}{\partial\varphi_B(x)} \frac{\partial(x')}{\partial(x)} \Delta\varphi_B(x) d^4x$$

$$\equiv \int_\Omega [L\{\varphi(x)\}]^B \Delta\varphi_B(x) d^4x.$$

Ω は任意にとってよいから

$$[L\{\varphi'(x')\}]^A \frac{\partial\varphi_A'(x')}{\partial\varphi_B(x)} \frac{\partial(x')}{\partial(x)} \equiv [L\{\varphi(x)\}]^B. \tag{27.12}$$

ここで x' と x とは同一の世界点である.

(27.12) から，場の方程式

$$[L\{\varphi(x)\}]^B=0$$

が成立すれば，

$$[L\{\varphi'(x')\}]^A=0$$

も成立する. あるいは後者の x' の $'$ をはぶくと

$$[L\{\varphi'(x)\}]^A=0$$

となる. この方程式は (27.10) と全く同じ形をしている. 唯一のちがいは (27.10) の $\varphi_A(x)$ の代りに $\varphi_A'(x)$ となっていることだけである. したがって $\varphi_A(x)$ が (27.10) の特解ならば，$\varphi_A'(x)$ もまた同じ方程式の解であることがわかる. しかし $\varphi_A'(x)$ は n 個の任意にとりうる関数 $\lambda^r(x)$ を含む. このような結果になったのは変換 (27.1) に対する I の不変性，つまり (27.12) という恒等式にもとづく.

(27.8) に ∂_μ を掛け (27.9) を使うと (27.7) が導かれる. したがって，これら3組の恒等式は互いに独立ではなく (27.8)，(27.9) だけが独立な恒等式である.

場の方程式 (27.10) を使うと，(27.7) は保存則

$$\partial_\mu\left\{\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\mu}}M_{r,A}-T^\mu{}_\nu\cdot X^\nu{}_r\right\}=0 \tag{27.13}$$

をあたえる. そこで§12 の議論によれば

$$J_r\overset{d}{\equiv}\int_V\left\{\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,0}}M_{r,A}-T^0{}_\nu\cdot X^\nu{}_r\right\}d^3x \tag{27.14}$$

は運動の恒量，つまり x^0 によらない一定の値をもつ. ところで (27.8)，(27.9) によれば

$$B^0{}_r\equiv-\partial_\nu C^{\nu 0}{}_r\equiv-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\partial_k(C^{k0}{}_r-C^{0k}{}_r). \tag{27.15}$$

そこで J_r は

$$J_r=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\int_V\partial_k\{C^{k0}{}_r-C^{0k}{}_r\}d^3x, \tag{27.16}$$

あるいは3次元空間における Gauss の定理により

$$J_r = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\int_S \{C^{k0}{}_r - C^{0k}{}_r\}\, d\sigma_k \qquad (27.16)'$$

$$(d\sigma_1 = dx^2dx^3, \qquad d\sigma_2 = dx^1dx^3, \qquad d\sigma_3 = dx^1dx^2)$$

となる．(27.16) は3次元領域 (x^0 = 一定) V の中の積分を示す．ただし V は十分に大きく選ばれており，その外側では $B^{k0}{}_r$ は0とする．また (27.16)′ は V の表面 S の上の積分を意味する．もし空間座標の原点から S の上の任意の点 $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ までの "距離" $r = \{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\}^{1/2}$ が十分に大きくなると，* $\vec{x}$ における $C^{k0}{}_r$ の値が $1/r^2$ の割合で小さくなるときは，積分 (27.16)′ は0でない有限の値をとりうる．なぜなら $d\sigma_k$ ($k = 1, 2, 3$) は r^2 に比例して増大するからである．これに反して，もし $C^{k0}{}_r(\vec{x})$ が $r \to \infty$ とともに $1/r^{2+\varepsilon}$，($\varepsilon > 0$) のように振舞うときは J_r は0となる．

一般相対論では後に説明するように重力場のエネルギー・テンソルという量が定義される．これを用いて重力場の全エネルギーを計算すると，それは重力場の存在する3次元空間領域 V の表面 S の上の面積積分としてかき表わされる．しかしこの場合には $V \to \infty (r \to \infty)$ の極限でもその表面積分は0でない有限確定値をもつ．

最後に (27.9) について述べよう．いままで述べてきた場の方程式 (27.10) は，解析力学でいう Lagrange 形式に相当する．解析力学では，このほかに正準形式とよばれる理論がある．この理論では質点の位置 q に対して，それに正準共役な運動量 p を定義し，p と q を用いて質点の運動方程式をかく．もしこれを場の理論に応用するときは，$\varphi_A(x)$ に正準共役な量 $\pi^A(x)$ をまず定義しなければならない (§61 参照)．これは

$$\pi^A(x) \overset{d}{\equiv} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,0}(x)}$$

により与えられる．N 個の $\pi^A(x)$ は，もちろん，互いに独立であり，また $\varphi_A(x)$ とも独立でなければならない．ところが恒等式 (27.9) はこの独立とい

---

* ここでは距離の定義を特に与えてない．したがって r を距離とよぶことは正しくないので，特に "距離" と記した．

う基本的要請を破る．なぜならば，(27.9) で $\mu=\nu=0$ とおくと

$$C^{00}{}_r \equiv \pi^A N_r{}^0{}_{,A} \equiv 0 \tag{27.17}$$

となる．つまり，N 個の π^A の間には (27.17) のような線形恒等式が存在する．この事情は，この理論を正準形式にかこうとするとき，あるいはまた量子論的に扱おうとするとき大きな障害となる．

§28. 第2定理の応用例

(a) ゲージ変換

例として再び Lagrange 関数

$$L = -\frac{1}{4c\mu_0} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - \frac{1}{c}(\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi^{*A}\cdot(\partial_\nu - ieA_\nu)\varphi_A \eta^{\mu\nu} - \frac{1}{c} m^2 \varphi^{*A}\varphi_A \tag{26.19}$$

を考えよう．この L から作られる作用積分 I は，変換

$$\left.\begin{aligned} \delta x^\mu &= 0, \\ \delta A_\mu &\overset{d}{\equiv} A_\mu'(x) - A_\mu(x) = \partial_\mu \lambda, \\ \delta\varphi_A &\overset{d}{\equiv} e^{ie\lambda}\varphi_A - \varphi_A \approx ie\lambda\varphi_A, \\ \delta\varphi^{*A} &\overset{d}{\equiv} e^{-ie\lambda}\varphi^{*A} - \varphi^{*A} \approx -ie\lambda\varphi^{*A} \end{aligned}\right\} \tag{28.1}$$

に対して不変である．ここで $\lambda(x)$ は x の任意のスカラー関数とし，一般論にしたがって無限小量とする．この変換は (無限小) **ゲージ変換** とよばれる．

さて，L から変分原理によって導かれる場の方程式は

$$\begin{aligned} [L]_A &\overset{d}{\equiv} \frac{\partial L}{\partial\varphi^{*A}} - \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi^{*A}{}_{,\mu}}\right) \\ &= \frac{1}{c}\{\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial_\nu - ieA_\nu)\varphi_A - m^2\varphi_A\} = 0, \end{aligned} \tag{28.2}$$

$$\begin{aligned} [L]^{*A} &\overset{d}{\equiv} \frac{\partial L}{\partial\varphi_A} - \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\mu}}\right) \\ &= \frac{1}{c}\{\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial_\nu + ieA_\nu)\varphi^{*A} - m^2\varphi^{*A}\} = 0 \end{aligned} \tag{28.3}$$

および

$$[L]^{\mu} \stackrel{d}{\equiv} \frac{\partial L}{\partial A_{\mu}} - \partial_{\nu}\left(\frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}}\right) = -\frac{1}{c\mu_0}\{\partial_{\nu} f^{\mu\nu} - \mu_0 J^{\mu}\} = 0 \qquad (28.4)$$

である．ここで J^{μ} の定義は

$$J^{\mu} \stackrel{d}{\equiv} ie\eta^{\mu\nu}\{(\partial_{\nu} + ieA_{\nu})\varphi^{*A}\cdot\varphi_A - \varphi^{*A}\cdot(\partial_{\nu} - ieA_{\nu})\varphi_A\} \qquad (26.22)$$

である．

さて，一般論の恒等式 (27.4) は，この例では

$$ie\{[L]^{*A}\varphi_A - [L]_A\varphi^{*A}\} - \partial_{\mu}[L]^{\mu} \equiv 0. \qquad (28.5)$$

これは3組の場の方程式 (28.2)，(28.3) および (28.4) の間に存在する恒等式である．このような恒等式が存在するであろうという予想は既に§26の最後で述べた．

つぎに，(27.6) の $B^{\mu}{}_r$ は（この例では $r=1$ だけであるから，この添字をはぶく）

$$B^{\mu} \stackrel{d}{\equiv} -\frac{ie}{c}\eta^{\mu\nu}\{(\partial_{\nu} + ieA_{\nu})\varphi^{*A}\cdot\varphi_A - \varphi^{*A}(\partial_{\nu} - ieA_{\nu})\varphi_A\} + [L]^{\mu}$$

となる．あるいは

$$B^{\mu} \stackrel{d}{\equiv} -\frac{1}{c\mu_0}\partial_{\nu} f^{\mu\nu} \qquad (28.6)$$

となる．同様に $C^{\mu\nu}{}_r$ は

$$C^{\mu\nu} \stackrel{d}{\equiv} -\frac{1}{c\mu_0} f^{\mu\nu} \qquad (28.7)$$

となる．これらを使うと一般論の恒等式 (27.7)，(27.8)，(27.9) は自明となる．

場の方程式 (28.4) を使うと，(28.6) は

$$B^{\mu} = -\frac{1}{c} J^{\mu} \qquad (28.8)$$

となる．また，恒等式 (27.7) は，場の方程式を使うと

$$\partial_{\mu} J^{\mu} = 0. \qquad (28.9)$$

これは電流の連続方程式にほかならない．全電気量は

$$Q=\int_V J^0\, d^3x. \tag{28.10}$$

これを場の方程式を使って $f^{\mu\nu}$ でかき表わすと

$$Q=\frac{1}{\mu_0}\int_V \sum_{k=1}^{3}\partial_k f^{0k}\, d^3x.$$

あるいは Gauss の定理により

$$Q=\frac{1}{\mu_0}\sum_{k=1}^{3}\int_S f^{0k}\, d\sigma_k\,. \tag{28.11}$$

これは一般論の (27.16)′ にほかならない.

恒等式 (27.8) はこの例ではつぎのようにかくことができる:

$$ie\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\mu}}\varphi_A-\frac{\partial L}{\partial\varphi^{*A}{}_{,\mu}}\varphi^{*A}\right)+\frac{\partial L}{\partial A_\mu}\equiv 0. \tag{28.12}$$

J^μ の定義を使うと，これは

$$-\frac{1}{c}J^\mu+\frac{\partial L}{\partial A_\mu}\equiv 0$$

となる. つまり

$$J^\mu \overset{d}{\equiv} -iec\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\mu}}\varphi_A-\frac{\partial L}{\partial\varphi^{*A}{}_{,\mu}}\varphi^{*A}\right)\equiv c\,\frac{\partial L}{\partial A_\mu}$$

のように2通りの定義のあることがわかる.

恒等式 (28.12) はさらにつぎのことを示す. すなわち，L は $\varphi_{A,\mu}$ および $\varphi^{*A}{}_{,\mu}$ に

$$\nabla_\mu\varphi_A \overset{d}{\equiv} \partial_\mu\varphi_A-ieA_\mu\varphi, \qquad \nabla_\mu\varphi^{*A} \overset{d}{\equiv} \partial_\mu\varphi^{*A}+ieA_\mu\varphi^{*A}$$

という組合せを通してだけ依存することを表わしている. またこれ以外には L は A_μ 自身には依存しないこともわかる. なぜならば

$$L \overset{d}{\equiv} L\{\nabla_\mu\varphi_A,\ \nabla_\mu\varphi^{*A},\ \varphi,\ \varphi^*,\ A_{\mu,\nu}\}$$

とおけば

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial A_\mu}&=\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\mu\varphi_A)}(-ie\varphi_A)+\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\mu\varphi^{*A})}(ie\varphi^{*A})\\&=-ie\left\{\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\mu}}\varphi_A-\frac{\partial L}{\partial\varphi^{*A}{}_{,\mu}}\varphi^{*A}\right\}\end{aligned}$$

だからである．確かに（26.19）という Lagrange 関数はこの主張のとおりの形をしている．

一般論の恒等式（27.9）はこの例では

$$\frac{\partial L}{\partial A_{\nu,\mu}}+\frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}}\equiv 0. \tag{28.13}$$

これは L が $A_{\nu,\mu}$ に，$f_{\mu\nu}\overset{d}{\equiv}\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ という反対称の組合せを通してのみ依存することを示す．したがってゲージ変換（28.1）に対して不変な作用積分を与える Lagrange 関数は少くとも

$$L\overset{d}{\equiv}L(\nabla_\mu\varphi_A,\ \nabla_\mu\varphi^{*A},\ \varphi_A,\ \varphi^{*A},\ f_{\mu\nu}) \tag{28.14}$$

という形をしている必要がある．（26.19）はまさにこの主張のとおりの形をしている．

なお，（28.1）に対して $\nabla_\mu\varphi_A$, $\nabla_\mu\varphi^{*A}$ の変化量は

$$\delta(\nabla_\mu\varphi_A)=ie\lambda(\nabla_\mu\varphi_A),\qquad \delta(\nabla_\mu\varphi^{*A})=-ie\lambda(\nabla_\mu\varphi^{*A})$$

となる．また $f_{\mu\nu}$ はゲージ変換に対して不変である．したがってこの場合には（28.1）は，第1定理の例として考えた位相変換（26.20）と全く同じ形である．$\partial\lambda/\partial x^\mu$ は変換に際してどこにも顔をださない．それゆえ（28.14）という形の L から作られた作用積分 I がゲージ不変量であるという要請は，この L が位相変換に対して不変という要請と同じことになる．

以上をまとめるとつぎの結論が導かれる．

L が位相変換に対して不変であり，さらにそれが（28.14）という形をしているときは，この L から作られる作用積分 I はゲージ変換（28.1）に対しても不変である．

（b） 一般座標変換

これから電磁場と重力場が相互作用しつつ共存している場合を考えよう．Lagrange 関数は

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{L}\overset{d}{\equiv}\boldsymbol{L}_G+\boldsymbol{L}_E,\\ &\boldsymbol{L}_G\overset{d}{\equiv}-\frac{1}{2c\kappa}\sqrt{-g}\,R,\qquad \boldsymbol{L}_E\overset{d}{\equiv}-\frac{1}{4c\mu_0}\sqrt{-g}\,g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}f_{\mu\nu}f_{\rho\sigma}.\end{aligned}\right\} \tag{28.15}$$

この例では Lagrange 関数が一般座標変換に対してスカラー密度であることを明示するために，約束に従って太字で表わした．

さて，(22.9) によると，$\boldsymbol{L}$ はまた

$$\boldsymbol{L} \overset{d}{\equiv} \boldsymbol{L}' - \frac{1}{2c\kappa}\partial_\mu \boldsymbol{D}^\mu \tag{28.16}$$

とかくこともできる．ここで

$$\boldsymbol{L}' \overset{d}{\equiv} \frac{1}{2c\kappa}\boldsymbol{G} + \boldsymbol{L}_E, \tag{28.17}$$

$$\boldsymbol{G} \overset{d}{\equiv} \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\{\Gamma^\lambda{}_{\mu\rho}\Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\Gamma^\rho{}_{\lambda\rho}\}, \tag{22.8}$$

$$\boldsymbol{D}^\mu \overset{d}{\equiv} \sqrt{-g}\,\{g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda{}_{\nu\lambda} - g^{\alpha\beta}\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\}. \tag{22.10}$$

Hamilton の原理を使うとつぎのような場の方程式が導かれる：

$$[\boldsymbol{L}']^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \frac{1}{2c\kappa}\left\{\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda\left(\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}}\right)\right\} + \frac{\partial \boldsymbol{L}_E}{\partial g_{\mu\nu}}$$

$$= \frac{1}{2c\kappa}[\boldsymbol{G}^{\mu\nu} - \kappa \boldsymbol{E}^{\mu\nu}] = 0. \tag{28.18}$$

ここで

$$\boldsymbol{G}^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \sqrt{-g}\, G^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \sqrt{-g}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right), \tag{15.21}$$

$$\boldsymbol{E}^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} -2c\frac{\partial \boldsymbol{L}_E}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{\mu_0}\sqrt{-g}\left\{-f^{\mu\alpha}f^{\nu\beta}g_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}f^{\alpha\beta}f_{\alpha\beta}\right\}. \tag{19.18}$$

$\boldsymbol{E}^{\mu\nu}$ は電磁場の対称エネルギー・テンソル密度である．また (28.18) は Einstein の方程式にほかならない．

$\boldsymbol{L}$ の A_μ に対する変分からは重力場のなかにおける Maxwell の方程式が導かれる：

$$[\boldsymbol{L}']^\mu \equiv [\boldsymbol{L}_E]^\mu \overset{d}{\equiv} -\frac{1}{c\mu_0}\partial_\nu \boldsymbol{f}^{\mu\nu} = 0. \tag{28.19}$$

ここで

$$\boldsymbol{f}^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \sqrt{-g}\, g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}f_{\alpha\beta}. \tag{28.20}$$

さて，Lagrange 関数 $\boldsymbol{L}$ は一般論で扱った Lagrange 関数と異なり，$\partial_\mu \boldsymbol{D}^\mu$ という余計な項をもつ．これは (22.10) からわかるように $g_{\mu\nu}$ の2階微係数を

もつ．しかし $\boldsymbol{L}'$ は場の量 A_μ および $g_{\mu\nu}$ の1階微係数までの関数であるから，これには一般論の議論をそのまま適用できる．そこで，$\boldsymbol{L}$ から作られる作用積分

$$I \overset{d}{\equiv} \int_\Omega \boldsymbol{L}\, d^4x$$

に対して，一般論に準じた考察を試みよう．

まず無限小の一般座標変換

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} \overset{d}{\equiv} x^\mu + \lambda^\mu(x) \overset{d}{\equiv} x^\mu + \delta x^\mu \tag{28.21}$$

を考えよう．$\lambda^\mu(x)$ は無限小の任意関数である．これに応じて場の量も λ^μ の1次までの近似で

$$\left.\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu} &\overset{d}{\equiv} -\lambda^\rho{}_{,\mu} g_{\rho\nu} - \lambda^\rho{}_{,\nu} g_{\mu\rho} \\ \delta A_\mu &\overset{d}{\equiv} -\lambda^\rho{}_{,\mu} A_\rho \end{aligned}\right\} \tag{28.22}$$

という変分をうける．

作用積分

$$I \overset{d}{\equiv} \int_\Omega \boldsymbol{L}\, d^4x = \int_\Omega \left\{ \boldsymbol{L}' - \frac{1}{2c\kappa} \partial_\mu \boldsymbol{D}^\mu \right\} d^4x \tag{28.23}$$

は上述の変換に対して不変であるから

$$\delta I = \int_\Omega \left\{ \bar{\delta} \boldsymbol{L} + \partial_\lambda (\boldsymbol{L} \delta x^\lambda) \right\} d^4x \equiv 0. \tag{28.24}$$

ここで

$$\bar{\delta} \boldsymbol{L} \overset{d}{\equiv} \bar{\delta} \boldsymbol{L}' - \frac{1}{2c\kappa} \partial_\mu \bar{\delta} \boldsymbol{D}^\mu,$$

$$\bar{\delta} \boldsymbol{L}' \overset{d}{\equiv} \frac{\partial \boldsymbol{L}'}{\partial g_{\mu\nu}} \bar{\delta} g_{\mu\nu} + \frac{\partial \boldsymbol{L}'}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \bar{\delta} g_{\mu\nu,\lambda} + \frac{\partial \boldsymbol{L}'}{\partial A_{\mu,\lambda}} \bar{\delta} A_{\mu,\lambda},$$

$$\bar{\delta} \boldsymbol{D}^\mu \overset{d}{\equiv} \frac{\partial \boldsymbol{D}^\mu}{\partial g_{\mu\nu}} \bar{\delta} g_{\mu\nu} + \frac{\partial \boldsymbol{D}^\mu}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \bar{\delta} g_{\mu\nu,\lambda}.$$

そこで，一般論と同様に

$$\delta I = \int_\Omega \{ [\boldsymbol{L}']^{\mu\nu} \bar{\delta} g_{\mu\nu} + [\boldsymbol{L}']^\mu \bar{\delta} A_\mu \} d^4x$$

$$+\int_\Omega \partial_\lambda \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{L}'}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \bar{\delta} g_{\mu\nu} + \frac{\partial \boldsymbol{L}'}{\partial A_{\mu,\lambda}} \bar{\delta} A_\mu + \left(\boldsymbol{L}' - \frac{1}{2c\kappa} \partial_\mu \boldsymbol{D}^\mu \right) \delta x^\lambda - \frac{1}{2c\kappa} \bar{\delta} \boldsymbol{D}^\lambda \right\} d^4x \equiv 0.$$

この第1，2項に（28.22）を代入し，部分積分により一般論と同様のかきかえをすると

$$\int_\Omega \lambda^\rho \Big\{ 2\partial_\mu ([\boldsymbol{L}']^{\mu\nu} g_{\nu\rho}) - [\boldsymbol{L}']^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\rho} + \partial_\mu ([\boldsymbol{L}']^\mu A_\rho) - [\boldsymbol{L}']^\mu A_{\mu,\rho} \Big\} d^4x$$
$$+\int_\Omega \partial_\lambda \Big\{ -2\,[\boldsymbol{L}']^{\lambda\nu} g_{\nu\rho} \lambda^\rho - [\boldsymbol{L}']^\lambda A_\rho \lambda^\rho + \frac{\partial \boldsymbol{L}'}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \delta g_{\mu\nu} + \frac{\partial \boldsymbol{L}'}{\partial A_{\mu,\lambda}} \delta A_\mu - \left(\frac{\partial \boldsymbol{L}'}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} g_{\mu\nu,\rho} + \frac{\partial \boldsymbol{L}'}{\partial A_{\mu,\lambda}} A_{\mu,\rho} - \delta^\lambda{}_\rho \boldsymbol{L}' \right) \delta x^\rho$$
$$- \frac{1}{2c\kappa} (\partial_\mu \boldsymbol{D}^\mu \delta x^\lambda + \bar{\delta} \boldsymbol{D}^\lambda) \Big\} d^4x \equiv 0. \tag{28.25}$$

そこで2組の恒等式

$$2\partial_\mu [\boldsymbol{L}']^\mu{}_\rho - [\boldsymbol{L}']^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\rho} \equiv [\boldsymbol{L}']^\mu A_{\mu,\rho} - \partial_\mu ([\boldsymbol{L}']^\mu A_\rho) \tag{28.26}$$

および

$$\partial_\lambda \{ (-2[\boldsymbol{L}']^\lambda{}_\rho - [\boldsymbol{L}']^\lambda A_\rho) \lambda^\rho + \cdots \} \equiv 0 \tag{28.27}$$

が導かれる．ここで $[\boldsymbol{L}']^\lambda{}_\rho \overset{d}{\equiv} [\boldsymbol{L}']^{\lambda\nu} g_{\nu\rho}$ である．

（28.26）は Einstein の方程式（28.18）と Maxwell の方程式（28.19）の間に存在する恒等的関係式である．これを具体的にかくと

$$\frac{1}{c\kappa} \nabla_\mu (\boldsymbol{G}^\mu{}_\rho - \kappa \boldsymbol{E}^\mu{}_\rho) \equiv \frac{1}{c\mu_0} \partial_\nu \boldsymbol{f}^{\mu\nu} f_{\mu\rho}. \tag{28.26$'$}$$

もし最初の Lagrange 関数として $\boldsymbol{L}_G$ だけを考えれば（つまり電磁場 A_μ を0とおけば），いままで説明した推論をそのままくり返すことにより，(28.26)$'$ の代りに

$$\nabla_\mu \boldsymbol{G}^\mu{}_\rho \equiv 0 \tag{28.28}$$

という恒等式が導かれる． これは Bianchi の恒等式にほかならない． これを (28.26)$'$ に代入すれば，恒等式

$$-\nabla_\mu \boldsymbol{E}^\mu{}_\rho \equiv \frac{1}{\mu_0}\partial_\nu \boldsymbol{f}^{\mu\nu} f_{\mu\rho} \tag{28.26$''$}$$

となる．これに Maxwell の方程式（28.19）を使うと，電磁場のエネルギー・テンソルに対する保存則

$$\nabla_\mu \boldsymbol{E}^\mu{}_\nu = 0 \tag{28.29}$$

が導かれる．

つぎに（28.27）は

$$\partial_\lambda\{\boldsymbol{B}^\lambda{}_\rho \lambda^\rho + \boldsymbol{C}^{\lambda,\sigma}{}_\rho \cdot \lambda^\rho{}_{,\sigma} + \boldsymbol{F}^{\lambda,\sigma\tau}{}_\rho \cdot \lambda^\rho{}_{,\sigma\tau}\} \equiv 0 \tag{28.30}$$

という形にかき表わされる．ここで

$$\boldsymbol{B}^\lambda{}_\rho \overset{d}{\equiv} -\frac{1}{c\kappa}(\boldsymbol{G}^\lambda{}_\rho - \kappa \boldsymbol{E}^\lambda{}_\rho) + \frac{1}{c\mu_0}\partial_\nu \boldsymbol{f}^{\lambda\nu} A_\rho - \frac{1}{c}(\boldsymbol{t}^\lambda{}_\rho + \boldsymbol{T}^\lambda{}_\rho)$$

$$-\frac{1}{2c\kappa}(\delta^\lambda{}_\rho \partial_\mu \boldsymbol{D}^\mu - \partial_\rho \boldsymbol{D}^\lambda), \tag{28.31}$$

$$\boldsymbol{C}^{\lambda,\sigma}{}_\rho \overset{d}{\equiv} -\frac{1}{c\kappa}\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial g_{\sigma\nu,\lambda}} g_{\rho\nu} - \frac{\partial \boldsymbol{L}_E}{\partial A_{\sigma,\lambda}} A_\rho$$

$$+\frac{1}{c\kappa}\left(\frac{\partial \boldsymbol{D}^\lambda}{\partial g_{\sigma\nu}} g_{\rho\nu} + \frac{\partial \boldsymbol{D}^\lambda}{\partial g_{\sigma\nu,\tau}} g_{\rho\nu,\tau} + \frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{D}^\lambda}{\partial g_{\tau\nu,\sigma}} g_{\tau\nu,\rho}\right), \tag{28.32}$$

$$\boldsymbol{F}^{\lambda,\sigma\tau}{}_\rho \overset{d}{\equiv} \frac{1}{2c\kappa}\left(\frac{\partial \boldsymbol{D}^\lambda}{\partial g_{\sigma\nu,\tau}} + \frac{\partial \boldsymbol{D}^\lambda}{\partial g_{\tau\nu,\sigma}}\right) g_{\rho\nu}. \tag{28.33}$$

また（28.31）にでてきた $\boldsymbol{t}^\lambda{}_\rho$, $\boldsymbol{T}^\lambda{}_\rho$ はそれぞれ

$$\boldsymbol{t}^\lambda{}_\rho \overset{d}{\equiv} \frac{1}{2\kappa}\left(\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial g_{\alpha\beta,\lambda}} g_{\alpha\beta,\rho} - \delta^\lambda{}_\rho \boldsymbol{G}\right), \tag{28.34 a}$$

$$\boldsymbol{T}^\lambda{}_\rho \overset{d}{\equiv} c\left(\frac{\partial \boldsymbol{L}_E}{\partial A_{\alpha,\lambda}} A_{\alpha,\rho} - \delta^\lambda{}_\rho \boldsymbol{L}_E\right) \tag{28.34 b}$$

である．

（28.30）の微分を計算すると，左辺は λ の3階微分までの1次式となる．これが恒等的に0となるためには λ の各微分の係数が恒等的に0とならねばならない．したがってつぎのような4組の恒等式が導かれる：

$$\partial_\lambda \boldsymbol{B}^\lambda{}_\rho \equiv 0, \tag{28.35}$$

$$\boldsymbol{B}^\lambda{}_\rho + \partial_\sigma \boldsymbol{C}^{\sigma,\lambda}{}_\rho \equiv 0, \tag{28.36}$$

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{C}^{\lambda,\sigma}{}_{\rho}+\boldsymbol{C}^{\sigma,\lambda}{}_{\rho})+\partial_{\tau}\boldsymbol{F}^{\tau,\lambda\sigma}{}_{\rho}\equiv 0, \tag{28.37}$$

$$\boldsymbol{F}^{\lambda,\sigma\tau}{}_{\rho}+\boldsymbol{F}^{\sigma,\tau\lambda}{}_{\rho}+\boldsymbol{F}^{\tau,\lambda\sigma}{}_{\rho}\equiv 0. \tag{28.38}$$

これらは互いに独立ではなく，(28.36)~(28.38) から (28.35) が導かれる．

ところで，もとの Lagrange 関数 $\boldsymbol{L}$ の代りに $\boldsymbol{L}_G$ だけを考えても，それがスカラー密度であるために，以上に述べた議論はそのまま $\boldsymbol{L}_G$ についても成立する．したがって (28.35)~(28.38) の中の A_μ をすべて 0 とおいた恒等式も成り立つ．すなわち

$$^0\boldsymbol{B}^{\lambda}{}_{\rho}\overset{d}{\equiv}-\frac{1}{c\kappa}\boldsymbol{G}^{\lambda}{}_{\rho}-\frac{1}{c}\boldsymbol{t}^{\lambda}{}_{\rho}-\frac{1}{2c\kappa}(\delta^{\lambda}{}_{\rho}\partial_{\mu}\boldsymbol{D}^{\mu}-\partial_{\rho}\boldsymbol{D}^{\lambda}), \tag{28.31$'$}$$

$$^0\boldsymbol{C}^{\lambda,\sigma}{}_{\rho}\overset{d}{\equiv}-\frac{1}{c\kappa}\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial g_{\sigma\nu,\lambda}}g_{\rho\nu}+\frac{1}{c\kappa}\left(\frac{\partial\boldsymbol{D}^{\lambda}}{\partial g_{\sigma\nu}}g_{\rho\nu}+\frac{\partial\boldsymbol{D}^{\lambda}}{\partial g_{\sigma\nu,\tau}}g_{\rho\nu,\tau}+\frac{1}{2}\frac{\partial\boldsymbol{D}^{\lambda}}{\partial g_{\tau\nu,\sigma}}g_{\tau\nu,\rho}\right) \tag{28.32$'$}$$

とおけば，(28.35)~(28.38) の中の $\boldsymbol{B}$ を $^0\boldsymbol{B}$ に，$\boldsymbol{C}$ を $^0\boldsymbol{C}$ に，$\boldsymbol{F}$ はそのままにした恒等式も成立する．これらをそれぞれ (28.35)~(28.38) の対応する式に代入すると

$$\partial_{\lambda}\left[\boldsymbol{E}^{\lambda}{}_{\rho}+\frac{1}{\mu_0}\partial_{\nu}\boldsymbol{f}^{\lambda\nu}A_{\rho}-\boldsymbol{T}^{\lambda}{}_{\rho}\right]\equiv 0, \tag{28.35$'$}$$

$$\boldsymbol{E}^{\lambda}{}_{\rho}+\frac{1}{\mu_0}\partial_{\nu}\boldsymbol{f}^{\lambda\nu}A_{\rho}-\boldsymbol{T}^{\lambda}{}_{\rho}-c\partial_{\sigma}\left(\frac{\partial\boldsymbol{L}_E}{\partial A_{\lambda,\sigma}}A_{\rho}\right)\equiv 0, \tag{28.36$'$}$$

$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{L}_E}{\partial A_{\sigma,\lambda}}+\frac{\partial\boldsymbol{L}_E}{\partial A_{\lambda,\sigma}}\right)A_{\rho}\equiv 0 \tag{28.37$'$}$$

という恒等式も導かれる．

ここで Maxwell の方程式 (28.19) を使うと，(28.35)$'$ から

$$\partial_{\lambda}\boldsymbol{E}^{\lambda}{}_{\rho}=\partial_{\lambda}\boldsymbol{T}^{\lambda}{}_{\rho}. \tag{28.39}$$

また (28.36)$'$ からは

$$\boldsymbol{E}^{\lambda}{}_{\rho}=\boldsymbol{T}^{\lambda}{}_{\rho}+c\,\partial_{\sigma}\left(\frac{\partial\boldsymbol{L}_E}{\partial A_{\lambda,\sigma}}A_{\rho}\right). \tag{28.40}$$

あるいは，(28.37)$'$ を使うと

$$\boldsymbol{E}^{\lambda}{}_{\rho}=\boldsymbol{T}^{\lambda}{}_{\rho}+\frac{c}{2}\partial_{\sigma}\left\{\left(\frac{\partial\boldsymbol{L}_E}{\partial A_{\lambda,\sigma}}-\frac{\partial\boldsymbol{L}_E}{\partial A_{\sigma,\lambda}}\right)A_{\rho}\right\} \tag{28.41}$$

という関係式が求まる．$\boldsymbol{T}^{\lambda}{}_{\rho}$ は電磁場の正準エネルギー・テンソル密度であり，$\boldsymbol{E}^{\lambda\rho}$ は対称エネルギー・テンソル密度（これは一般変換に対してテンソル密度であるが $\boldsymbol{T}^{\lambda}{}_{\rho}$ はアフィン・テンソル密度である）である．(28.41) はこれらの間の関係を与える．特に (28.41) を $x^0=$ 一定 という瞬間において3次元全空間にわたり積分すると電磁場の全エネルギー・運動量が求まる：

$$\int \boldsymbol{E}^{0}{}_{\rho}\, d^3x = \int \boldsymbol{T}^{0}{}_{\rho}\, d^3x + \frac{c}{2}\sum_{k=1}^{3}\int \partial_k\left\{\left(\frac{\partial \boldsymbol{L}_E}{\partial A_{0,k}} - \frac{\partial \boldsymbol{L}_E}{\partial A_{k,0}}\right)A_\rho\right\} d^3x.$$

この最後の項は Gauss の定理により，無限遠にある境界面上の積分となる．しかし一般には，この被積分項は無限遠ではすばやく0に近づくので，結局この項は0となる．したがって全エネルギー・運動量の値は，$\boldsymbol{E}$ を用いても，$\boldsymbol{T}$ から計算しても

$$\int \boldsymbol{E}^{0}{}_{\rho}\, d^3x = \int \boldsymbol{T}^{0}{}_{\rho}\, d^3x$$

のように同じ値となる．

恒等式 (28.37)′ は $\boldsymbol{L}_E$ が，$f_{\lambda\sigma}$ という特別な形を通してのみ $\partial_\lambda A_\sigma$ に依存することを示す．すなわち，$\boldsymbol{L}_E$ が

$$\boldsymbol{L}_E = \boldsymbol{L}_E(\partial_\lambda A_\sigma,\ g_{\mu\nu})$$

という関数で，しかもスカラー密度となるためには $\boldsymbol{L}_E$ は $f_{\lambda\sigma}$ と $g_{\mu\nu}$ だけの関数であればよいということを意味する．

さきにも述べたように $\boldsymbol{L}$ の代りに $\boldsymbol{L}_G$ だけを用いれば (28.35)～(28.38) の中の $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ をそれぞれ ${}^0\boldsymbol{B}$, ${}^0\boldsymbol{C}$ におきかえ，一方 $\boldsymbol{F}$ はそのままにした恒等式が導かれる．それらの恒等式をそれぞれ $(28.35)^\circ$～$(28.38)^\circ$ とよぶことにしよう．まず $(28.35)^\circ$ を考えてみよう．(28.31)′ によれば

$${}^0\boldsymbol{B}^{\lambda}{}_{\rho} \stackrel{d}{\equiv} -\frac{1}{c}\left(\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{G}^{\lambda}{}_{\rho} + \boldsymbol{t}^{\lambda}{}_{\rho}\right) - \frac{1}{2c\kappa}\,\partial_\mu(\delta^{\lambda}{}_{\rho}\boldsymbol{D}^{\mu} - \delta^{\mu}{}_{\rho}\boldsymbol{D}^{\lambda}).$$

この第2項の（　　）の中は添字 λ, μ について反対称であるから，$(28.35)^\circ$ から

$$\partial_\lambda\left(\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{G}^\lambda{}_\rho+\boldsymbol{t}^\lambda{}_\rho\right)\equiv 0. \tag{28.42}$$

いま, Einstein の方程式 (28.18) を使うと

$$\partial_\lambda(\boldsymbol{E}^\lambda{}_\rho+\boldsymbol{t}^\lambda{}_\rho)=0. \tag{28.42$'$}$$

これはエネルギー運動量の保存則を微分形式にかいた場合の典型的な形をしている. この ( ) の中の第 1 項は電磁場の対称エネルギー・テンソル密度である. 一方, 第 2 項 $\boldsymbol{t}^\lambda{}_\rho$ は $g_{\mu\nu}$ およびその 1 階微係数だけからできあがっている量である. Einstein はこの $\boldsymbol{t}^\lambda{}_\rho$ を重力場のエネルギー・テンソル密度と考えた. しかし (28.34 a) からわかるように, $\boldsymbol{t}^\lambda{}_\rho$ はアフィン・テンソル密度ではあるが, 一般座標変換に対してはテンソル密度ではない. それにもかかわらず, どのような座標系でも (28.42)$'$ という "保存則" が成立する. そこでこれから $\boldsymbol{t}^\lambda{}_\rho$ を**重力場のエネルギー擬テンソル密度**と呼ぶことにする. あるいは, Møller に従って**エネルギー・コンプレックス**とよぶ方がよいかもしれない.

つぎに (28.36)° を考えてみよう. これに (28.31)$'$ を代入すると

$$-\frac{1}{c}\left(\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{G}^\lambda{}_\rho+\boldsymbol{t}^\lambda{}_\rho\right)-\frac{1}{2c\kappa}\partial_\sigma(\delta^\lambda{}_\rho\boldsymbol{D}^\sigma-\delta^\sigma{}_\rho\boldsymbol{D}^\lambda)$$

$$\equiv-\frac{1}{2}\partial_\sigma\{{}^0\boldsymbol{C}^{\sigma,\lambda}{}_\rho-{}^0\boldsymbol{C}^{\lambda,\sigma}{}_\rho\}-\frac{1}{2}\partial_\sigma\{{}^0\boldsymbol{C}^{\sigma,\lambda}{}_\rho+{}^0\boldsymbol{C}^{\lambda,\sigma}{}_\rho\}. \tag{28.43}$$

右辺の第 2 項に恒等式 (28.37)° を使い, また左辺の $\boldsymbol{G}^\lambda{}_\rho$ を Einstein の方程式を用いてかき直すと

$$-\frac{1}{c}(\boldsymbol{E}^\lambda{}_\rho+\boldsymbol{t}^\lambda{}_\rho)=\frac{1}{c\kappa}\partial_\sigma\delta^{[\lambda}{}_\rho\boldsymbol{D}^{\sigma]}-\partial_\sigma\{{}^0\boldsymbol{C}^{[\sigma,\lambda]}{}_\rho\}+\partial_\sigma\partial_\tau\boldsymbol{F}^{\tau,\lambda\sigma}{}_\rho. \tag{28.43$'$}$$

ここで一般に 2 個の添字をもつ任意の量 $Q^{\mu\nu}$ について

$$Q^{[\mu\nu]}\overset{d}{\equiv}\frac{1}{2}(Q^{\mu\nu}-Q^{\nu\mu})$$

という記号を用いることにする. (28.43)$'$ の右辺第 1, 2 項の肩の $[\sigma,\lambda]$ もこの意味で用いた.

ところで, § 12 で述べたように, $k=1, 2, 3$ に対して $\boldsymbol{E}^k{}_\rho+\boldsymbol{t}^k{}_\rho$ が空間的に

無限遠となるにしたがい十分に早く 0 となる場合には，(28.42)′ から*

$$J_\rho \overset{d}{\equiv} \int_{-\infty}^{\infty} (\boldsymbol{E}^0{}_\rho + \boldsymbol{t}^0{}_\rho) d^3x \tag{28.44}$$

は x^0 に無関係な量となる．$\boldsymbol{t}^\mu{}_\nu$ に対する Einstein の解釈に従うならば，J_ρ は重力場と電磁場を一緒にした全物理系のエネルギー・運動量ベクトルにほかならない．したがって (28.42)′ は全物理系のエネルギー・運動量保存則にほかならない．

(28.43)′ を用いると J_ρ はつぎのようにかきかえられる：

$$J_\rho = \sum_{k=1}^{3} \int \partial_k \left(-\frac{1}{\kappa} \delta^{[0}{}_\rho \boldsymbol{D}^{k]} + c\, {}^0\boldsymbol{C}^{[k,0]}{}_\rho \right) d^3x - c \int \partial_\sigma \partial_\tau \boldsymbol{F}^{\tau,0\sigma}{}_\rho\, d^3x. \tag{28.44$'$}$$

ところで，恒等式 (28.38) によれば

$$\boldsymbol{F}^{0,00}{}_\rho \equiv 0,$$
$$2\boldsymbol{F}^{0,0k}{}_\rho + \boldsymbol{F}^{k,00}{}_\rho \equiv 0,$$
$$\boldsymbol{F}^{k,0l}{}_\rho + \boldsymbol{F}^{l,0k}{}_\rho \equiv -\boldsymbol{F}^{0,kl}{}_\rho.$$

したがって，(28.44)′ の右辺第 2 積分は

$$\frac{c}{2} \sum_{k=1}^{3} \int \partial_k \left\{ \sum_{l=1}^{3} \partial_l \boldsymbol{F}^{0,kl}{}_\rho - \partial_0 \boldsymbol{F}^{k,00}{}_\rho \right\} d^3x$$

となる．そこで，3 次元空間の場合の Gauss の定理を使うと J_ρ は

$$J_\rho = \sum_{k=1}^{3} \int c \left(-\frac{1}{c\kappa} \delta^{[0}{}_\rho \boldsymbol{D}^{k]} + {}^0\boldsymbol{C}^{[k,0]}{}_\rho + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{3} \partial_l \boldsymbol{F}^{0,kl}{}_\rho - \frac{1}{2} \partial_0 \boldsymbol{F}^{k,00}{}_\rho \right) d\sigma_k \tag{28.45}$$

という表面積分の形にかき表わされる．積分域は全 3 次元空間を包む閉曲面である．ここで $d\sigma_k$ は

$$d\sigma_1 = dx^2 dx^3, \qquad d\sigma_2 = dx^3 dx^1, \qquad d\sigma_3 = dx^1 dx^2$$

である．もし (28.45) の被積分関数が無限遠に遠ざかるにしたがいすばやく 0 に近づくときは，J_ρ は 0 となる．J_ρ が 0 でない有限の値をもつためには，

*　これから $dx^1dx^2dx^3$ を d^3x とかくことにする．

原点からの空間的距離が r の点で，被積分量の値が $1/r^2$ に比例する必要がある．このような場合については次の節で述べる．

§29. 重力場のエネルギー・運動量

(28.43) の右辺の第2項に恒等式 (28.37)° を代入すると

$$\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{G}^{\lambda}{}_{\rho}+\boldsymbol{t}^{\lambda}{}_{\rho}\equiv-\frac{1}{\kappa}\partial_{\sigma}\delta^{[\lambda}{}_{\rho}\boldsymbol{D}^{\sigma]}+c\,\partial_{\sigma}({}^{0}\boldsymbol{C}^{[\sigma,\lambda]}{}_{\rho})$$
$$-c\,\partial_{\sigma}\partial_{\tau}\boldsymbol{F}^{\tau,\lambda\sigma}{}_{\rho}\,. \tag{29.1}$$

そこで，恒等式 (28.38) を使うと

$$\partial_{\lambda}\Big(\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{G}^{\lambda}{}_{\rho}+\boldsymbol{t}^{\lambda}{}_{\rho}\Big)\equiv 0 \tag{28.42}$$

が成り立つことが一目でわかる．

ここで§28の (b) に述べたような特別な場合に限らず，一般に物質系の対称エネルギー・テンソル密度を $\boldsymbol{M}^{\mu\nu}(=\boldsymbol{M}^{\nu\mu})$ とすれば，Einstein の方程式は (28.18) の代りに

$$\boldsymbol{G}^{\lambda}{}_{\rho}=\kappa\boldsymbol{M}^{\lambda}{}_{\rho} \tag{29.2}$$

となる．これを (28.42) に代入すれば，(28.42)′ の代りに

$$\partial_{\lambda}(\boldsymbol{M}^{\lambda}{}_{\rho}+\boldsymbol{t}^{\lambda}{}_{\rho})=0 \tag{29.3}$$

となる．したがって重力場と物質を一緒にした全物理系の全エネルギー・運動量は

$$J_{\rho}\overset{d}{\equiv}\int_{-\infty}^{\infty}(\boldsymbol{M}^{0}{}_{\rho}+\boldsymbol{t}^{0}{}_{\rho})d^{3}x \tag{29.4}$$

となる．この J_{ρ} は，物質系がどんなものであろうとも，恒等式 (29.1) のために，必ず (28.45) の形にかき表わすことができる．

さて，前節でも少し述べたように，$\boldsymbol{t}^{\mu}{}_{\nu}(x)$ は一般座標変換に対してはテンソル密度ではない．たとえば点 x における測地系を用いて $\boldsymbol{t}^{\mu}{}_{\nu}(x)$ を計算してみよう．$\boldsymbol{t}^{\mu}{}_{\nu}$ の定義から明らかなようにこれは Γ の2次同次式である．したがって，測地系を用いれば点 x において $\boldsymbol{t}^{\mu}{}_{\nu}(x)$ の成分はすべて0となる．しかし座標変換により成分のうちのあるものを0でないようにすることもできる．一

般座標変換に対して線形変換をうけるテンソル密度ではこのようなことは起こらない．Einstein のエネルギー・テンソル $t^{\mu}{}_{\nu}$ に関する奇妙なことはほとんどすべて，それが一般変換に対するテンソル密度ではないという事実にもとづいている．たとえば平坦な時空内に直交座標系（つまり Lorentz 系）を設けたとしよう．このときは Γ は時空内のどこでも恒等的に0であるから $t^{\mu}{}_{\nu}$ もいたるところで0となる．したがって重力場のエネルギーは予想どおり0となる．ところがもし空間座標として，直交系の代りに極座標系を採用すると $t^{\mu}{}_{\nu}$ は0とならないばかりでなく，重力場の全エネルギーは無限大となる．

一方，§36で述べる **Schwarzschild の時空**を考えてみよう．これは空間座標の原点に質量 M の質点が静止している場合，その周囲の時空を指す．この場合の $g_{\mu\nu}$ は [(36.5) を見よ]

$$ds^2 = -\left(1-\frac{a}{r}\right)(dx^0)^2 + \sum_{k=1}^{3}(dx^k)^2 + \frac{a}{r^2(r-a)}\left(\sum_{k=1}^{3} x^k dx^k\right)^2 \tag{29.5}$$

で与えられる．ここで a は，原点に静止している質点の質量を M とするとき

$$a = \frac{2GM}{c^2}$$

である．また r は

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$$

を表わす．この $g_{\mu\nu}$ を用いて $t^{\mu}{}_{\nu}$ を計算すると予期に反して，その成分は時空のいたるところですべて0となる．この事実をはじめて指摘したのは Schrödinger である．

このほかにも $t^{\mu}{}_{\nu}$ には種々の具合の悪い性質がある．たとえば $t^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} g^{\nu\rho} t^{\mu}{}_{\rho}$ は μ, ν について対称でない．また，エネルギー密度 $t^0{}_0(x)$ は正定値をとるとはかぎらない．つまり，点 x が変わるに応じて負の値をとることもある．いままでにわれわれが出会ったエネルギー密度はすべて時空内のいたるところで常に $\geqq 0$ であった．したがって $t^0{}_0$ の符号が一定でないことはそれの欠点というべきであろう．

以上のような欠点があるにもかかわらず，座標系をいったんきめたとき，J_ρ が時間 x^0 にかかわらず一定値をとるということは棄てがたい特徴である．上に述べた種々の批判に対し Einstein は次に述べるような反論を行った．まず Schrödinger の批判に対しては，もし2個（またはそれ以上）の質点が存在するときは $\boldsymbol{t}^\mu{}_\nu$ は0でないことを証明した．Einstein はまた，$\boldsymbol{t}^\mu{}_\nu$ 自身の値に物理的な意味を賦与することは断念すべきであると考えた．なぜならば重力場のエネルギーの分布状態は座標系のとりかたに応じて変化するからである．しかし孤立した物理系の全エネルギーおよび全運動量 J_ρ は，以下に述べるように相当に一般的な座標の変換に対しても，値が変わらないことを証明した．この証明はまず Einstein により与えられ，のちに Klein により完全な形にまとめられた．その概容は既に本書の§12に述べてある．つぎにその結果だけを述べよう．

いま，時空内で空間的には有界，時間的には過去から未来に向かって伸びている管状の4次元域を Ω とする．Ω の外では物質のエネルギー・テンソル密度 $M^{\mu\nu}$ は0とする．計量テンソル $g_{\mu\nu}$ も Ω の外ではすばやく Minkowski の計量 $\eta_{\mu\nu}$ に近づくものとする．このような座標系を選ぶことができる場合，この物理系を **孤立系** という（§12参照）．$g_{\mu\nu}$ に対する上述の境界条件は，採用する座標系に対して強い制限をつけたことになる．この条件のおかげで極座標系は排除される．また Ω から十分に遠ざかった地点では x^0 は特殊相対論で採用される時間と一致し，x^k（$k=1, 2, 3$）も特殊相対論にでてくる直交座標と同じものになる．したがって J_ρ が x^0 に無関係ということは，それが特殊相対論と同じ意味で時間に無関係な保存量であることを意味する．J_ρ に物理的意味を与えるためには，観測論的な裏付けの可能な座標系に制限する必要がある．このような制限により $\boldsymbol{t}^\mu{}_\nu$ に対する非難の大部分はとり除かれる．

採用する座標系に対する上述のような境界条件は強いものではあるが，それでもなおその選択には大きな自由度が残っている．いま孤立系に対して上述の条件を満足する座標系のひとつ（これを x-系と呼ぼう）を採用したとする．それを用いて計算した J_ρ は，§12に述べたように，以下のような性質をもつ．

i）J_ρ は $x^0=a$ の値に無関係である．

ii）座標系のアフィン変換

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} = a^\mu{}_\nu x^\nu + b^\nu$$

に対して，J_ρ はアフィン共変ベクトルである．

iii）つぎのような変換 $x^\mu \to x^{\mu\prime}$ を考える：

$$\Omega \text{ の外部では} \quad x^{\mu\prime} = x^\mu,$$

$$\Omega \text{ の内部では} \quad x^{\mu\prime} = f^\mu(x).$$

ただし f^μ は2階まで微分可能な，また互いに独立な4個の任意の関数である．

この変換に対して J_ρ の値は不変である．

上に述べた Einstein の証明により，重力場のエネルギーに対する議論は大体において終止符をうたれたとみてよかろう．そこでこれから孤立系に対して J_ρ を実際に計算してみよう．そのためにはまず孤立系の定義をもう少し明確にする必要がある．いま $r=\{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2\}^{1/2}$ とおき，$r\to\infty$ に対して

$$\left.\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &\overset{d}{\equiv} \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) \\ h_{\mu\nu}(x) &\to \frac{\text{const}}{r} \end{aligned}\right\} \tag{29.6}$$

となるような座標系を採ることができる場合，この物理系を孤立系と呼ぼう．

(29.5) によれば Schwarzschild の時空では，$g_{\mu\nu}$ は

$$\left.\begin{aligned} g_{00} &= -\left(1-\frac{a}{r}\right) = \eta_{00} + \frac{a}{r} \\ g_{k0} &= 0 \\ g_{ik} &= \eta_{ik} + \frac{a}{r^2(r-a)}\,x^i x^k \\ &(i,\,k=1,\,2,\,3) \end{aligned}\right\} \tag{29.5$'$}$$

である．つまり

$$h_{00} = \frac{a}{r}, \qquad h_{0k} = 0, \qquad h_{ik} = \frac{a x^i x^k}{r^2(r-a)} = O\!\left(\frac{1}{r}\right). \tag{29.7}$$

したがって，上に定義された意味の孤立系である．

さて，J_ρ を (28.45) の形にかき表わすと，全空間における $g_{\mu\nu}(x)$ の値を知らなくても，もし空間的な無限遠における $g_{\mu\nu}(x)$ の漸近的な値さえわかっていれば，J_ρ を計算することができる．そこでまず種々な量の $r\to\infty$ に対する漸近的振舞を調べてみよう：

$r\to\infty$ に対して (29.6) から

$$g_{\mu\nu,\lambda}=O(1/r^2),$$
$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}=O(1/r^2)$$

である．したがって，(22.10) から

$$\partial_\nu \boldsymbol{D}^\mu=O(1/r^3).$$

また (28.32)′, (28.33) から

$$\partial_\kappa\{{}^0\boldsymbol{C}^{[\kappa,\lambda]}{}_\rho\}=O(1/r^3),$$
$$\partial_\sigma\partial_\tau\boldsymbol{F}^{\tau,\lambda\sigma}{}_\rho=O(1/r^3).$$

一方，(28.34 a) から

$$\boldsymbol{t}^\lambda{}_\rho=O(1/r^4)$$

そこで $r\to\infty$ に対して (29.1) の右辺の一番大きな量は $O(1/r^3)$ である．それは当然 左辺の $O(1/r^3)$ の項に等しいはずであるから

(29.1) の右辺の $O\left(\dfrac{1}{r^3}\right)$ の項の和

$$=\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{G}^\lambda{}_\rho \text{ の } O\left(\frac{1}{r^3}\right) \text{ の項}$$

$$=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\kappa}\sqrt{-g}\left\{g^{\lambda\sigma}(\partial_\sigma\Gamma^\mu{}_{\rho\mu}-\partial_\mu\Gamma^\mu{}_{\sigma\rho})\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\delta^\lambda{}_\rho g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\Gamma^\mu{}_{\beta\mu}-\partial_\mu\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta})\right\}$$

$$=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\kappa}\eta^{\lambda\sigma}[h_{,\sigma\rho}-h^\alpha{}_{\sigma,\rho\alpha}-h^\alpha{}_{\rho,\sigma\alpha}+\Box h_{\sigma\rho}$$
$$-\eta_{\rho\sigma}(\Box h-h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta})]. \qquad (29.8)$$

ここで

$$h^{\alpha}{}_{\sigma} \overset{d}{\equiv} \eta^{\alpha\beta} h_{\beta\sigma}, \qquad h \overset{d}{\equiv} h^{\alpha}{}_{\alpha} \overset{d}{\equiv} \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}, \qquad \Box \overset{d}{\equiv} \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$$

である．

特に $\lambda=\rho=0$ のときは，(29.8) は

$$\lim_{r\to\infty} c\sum_{k=1}^{3}\partial_k\left\{-\frac{1}{c\kappa}\delta^{[0}{}_0\boldsymbol{D}^{k]} + {}^0\boldsymbol{C}^{[k,0]}{}_0 + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{3}\partial_l\boldsymbol{F}^{0,kl}{}_0 - \frac{1}{2}\partial_0\boldsymbol{F}^{k,00}{}_0\right\}$$

$$= \lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\kappa}[-h_{,00} + 2h^{\alpha}{}_{0,0\alpha} - \Box h_{00} - \Box h + h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta}]$$

$$= \lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\kappa}\sum_{k,l=1}^{3}\partial_k(h_{kl,l} - h_{ll,k}). \tag{29.8)$'$($$

したがって $r\to\infty$ では，$O(1/r^2)$ の量に着目すれば

$$c\left\{-\frac{1}{c\kappa}\delta^{[0}{}_0\boldsymbol{D}^{k]} + {}^0\boldsymbol{C}^{[k,0]}{}_0 + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{3}\partial_l\boldsymbol{F}^{0,kl}{}_0 - \frac{1}{2}\partial_0\boldsymbol{F}^{k,00}{}_0\right\}$$

$$= \frac{1}{2\kappa}\sum_{l=1}^{3}(h_{kl,l} - h_{ll,k}) \tag{29.8)$''$($$

となる．一般的には上の式の右辺にさらに X_k という項がつけ加わるかもしれない．この等式はもともと $g_{\mu\nu}$ に対する恒等式 (29.1) から導かれたものであるから，X_k は $g_{\mu\nu}$ とその1階微係数だけの関数である．また $r\to\infty$ の極限で，それは $O(1/r^2)$ の量である．したがって，X_k は h_{ij} の1階微係数の1次式のはずである．さらに (29.8)$'$ が成り立つためには，X_k は

$$\partial_k X_k = 0$$

を満足しなければならない．そのような X_k を $h_{ij,l}$ の1次式から作ろうとしても，0以外にはありえない．したがって，(29.8)$''$ は $O(1/r^2)$ の量に着目するかぎり正しい．

(29.8)$''$ を用いると (28.45) はつぎのような簡単な積分になる：

$$J_0 = \frac{1}{2\kappa}\int\sum_{k,l=1}^{3}(h_{kl,l} - h_{ll,k})d\sigma_k. \tag{29.9}$$

積分は3次元全空間を包む無限に大きい閉曲面上の面積分を示す．あるいは (29.6) を考えると，(29.9) は

$$J_0 = \frac{1}{2\kappa}\int\sum_{k,l=1}^{3}(g_{kl,l} - g_{ll,k})d\sigma_k \tag{29.9)$'$($$

とかくこともできる.

特に Schwarzschild の時空 (29.5) の場合には, $r \to \infty$ で

$$h_{kl} \approx \frac{ax^k x^l}{r^3}, \qquad a = \frac{2GM}{c^2}$$

であるから

$$J_0 = \frac{1}{2\kappa} \lim_{r\to\infty} \int \frac{2a}{r^3} x^k d\sigma_k$$

となる. ここで原点を中心とする半径 r の球面を積分面にとれば

$$d\sigma_k = \frac{x^k}{r} \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi$$

となる. θ, φ は極座標を用いたときの方位角である. そこで

$$J_0 = \lim_{r\to\infty} \frac{2a}{2\kappa} \int \frac{x^k x^k}{r^3} r \sin\theta \, d\theta d\varphi = \frac{4\pi a}{\kappa}.$$

ここで $\kappa = 8\pi G/c^4$ という定義を思い起こすと

$$J_0 = Mc^2 \tag{29.10}$$

となる. つまり J_0 は重力場の中心に静止している質点の静止エネルギーに等しい. したがって全空間に分布している重力場の全エネルギーは 0 に等しいことがわかる.

もし中心の質点が電荷 e をもつときはその周囲には重力場のほかに静電場も存在する. このときの J_ρ は (28.44) である. しかしこれも (28.45), あるいは (29.9)′ の形に表わされる. 電荷をもたない質点の場合との唯一のちがいは $g_{\mu\nu}$ の形にある. 荷電粒子が静止しているときの $g_{\mu\nu}$ は §43 でくわしく説明されるので, ここでは結果だけをかく: Reissner および Weyl によれば

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{a}{r} + \frac{\alpha^2}{r^2}\right)(dx^0)^2 + \left(1 - \frac{a}{r} + \frac{\alpha^2}{r^2}\right)^{-1}(dr)^2 \\ &\qquad + r^2\{(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2\} \\ &= -\left(1 - \frac{a}{r} + \frac{\alpha^2}{r^2}\right)(dx^0)^2 + \frac{ra - \alpha^2}{r^2(r^2 - ra + \alpha^2)}\left(\sum_{k=1}^{3} x^k dx^k\right)^2 \\ &\qquad + \sum_{k=1}^{3}(dx^k)^2. \end{aligned} \tag{29.11}$$

ここで a は前と同じものである．また $\alpha^2 = Ge^2/4\pi\varepsilon_0 c^4$ である．すなわち

$$\left.\begin{aligned} g_{00} &= -1 + \left(\frac{a}{r} - \frac{\alpha^2}{r^2}\right) \\ g_{ik} &= \eta_{ik} + \frac{ra - \alpha^2}{r^2(r^2 - ra + \alpha^2)} x^i x^k \\ g_{k0} &= 0 \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3) \end{aligned}\right\} \qquad (29.11)'$$

そこで $r \to \infty$ では

$$h_{ik} \to \frac{a}{r^3} x^i x^k$$

となる．つまり $g_{\mu\nu}$ の無限遠における振舞は電荷 e の有る無しに無関係である．したがってこのときも

$$J_0 = Mc^2$$

となる．

この M は厳密にいえば質点を無限遠からながめた場合の**重力質量**（重力を産みだす質量）である．一方，無限遠(そこはほとんど平坦)から質点の静止エネルギーを測定した場合，その値が上に与えた J_0 である．したがって J_0/c^2 は質点（そのまわりをかこむ重力場もひっくるめた質点）の**慣性質量**と考えられる．そこで上の結果は慣性質量が重力を産みだす質量（**能動的重力質量**）に等しいことを示している．これに対して質点が受ける重力の作用の強さを示す質量（**受動的重力質量**）を普通には重力質量と呼ぶ．この質量が慣性質量に等しいことは等価原理により説明される．

ついでに質点が原点に静止しているとき（つまり Schwarzschild 型の時空）の全運動量も計算してみよう．

(29.8) の $\lambda = 0$, ρ を $j(=1, 2, 3)$ とおけば，$r \to \infty$ に対して

(29.1) の右辺の $O(1/r^3)$ の項の和

$$= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\kappa} [-h_{,0j} + h^{\alpha}{}_{0,j\alpha} + h^{\alpha}{}_{j,0\alpha} - \Box h_{0j}].$$

Schwarzschild の時空では

$$h_{0j} = 0$$

であるから上の式は

$$=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\kappa}\sum_{l=1}^{3}(h_{lj,0l}-h_{ll,0j}).$$

しかし h_{ik} は時間に無関係であるから上の式は0となる．したがって，予想どおり

$$J_j=0 \qquad (j=1,\,2,\,3)$$

である．

第6章　重　力　波

§30. 弱い重力場

重力場の源となる物質から十分に離れたところでは，物質の対称エネルギー・テンソル $T^{\mu\nu}(=T^{\nu\mu})$ は0となる．したがって，そこでは Einstein の方程式は

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=0$$

となる．もし $g_{\mu\nu}$ として $\eta_{\mu\nu}$ をとれば，それがこの方程式のひとつの特解であることはすぐにわかる（宇宙項があるときはそうはいかない）．この事実から，源の物質から十分に離れたところでは時空は次第に平坦になると考えてよかろう．ところで，物質が存在するときの Einstein の方程式の解は Einstein の定数 κ に依存することはいうまでもない．そこで解を $\sqrt{\kappa}$ のべき級数に展開する．源から十分に離れたところでは上述の理由から，$\sqrt{\kappa}$ の高次の項を棄てて近似的に

$$g_{\mu\nu}(x)=\eta_{\mu\nu}+\sqrt{\kappa}\,h_{\mu\nu}(x) \tag{30.1}$$

とおくことができよう．(30.1) のようにすることができるとき $h_{\mu\nu}(x)$ を**線形化された重力場**のポテンシャルという．またこのような場を**弱い重力場**とよぶ．そのような近似法はもちろん座標系のとりかたに依存する．(30.1) のような形をとるのは座標系のうち，ある特別な仲間に限られる．したがって $h_{\mu\nu}$ は一般座標変換に対してはテンソルではない．しかし Lorentz 変換に対してはテンソルの振舞をすることは容易にわかるであろう．したがってこれから述べることは少くとも Lorentz 変換に対しては不変な意味をもつ．

(30.1) に対応して $g^{\mu\nu}$ や $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ を $\sqrt{\kappa}$ の1次までの近似でかくと

$$\left.\begin{aligned} g^{\mu\nu}&=\eta^{\mu\nu}-\sqrt{\kappa}\,h^{\mu\nu}\\ \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}&=\frac{1}{2}\sqrt{\kappa}\,(h^{\lambda}{}_{\mu,\nu}+h^{\lambda}{}_{\nu,\mu}-h_{\mu\nu,}{}^{\lambda})\end{aligned}\right\} \tag{30.2}$$

となる．この節では添字の上げ下ろしはすべて $\eta^{\mu\nu}$, $\eta_{\mu\nu}$ によるものとする． たとえば

$$h^{\mu}{}_{\nu} = \eta^{\mu\rho}h_{\rho\nu}\,,$$
$$h_{\mu\nu,}{}^{\lambda} = \eta^{\lambda\sigma}h_{\mu\nu,\sigma}\,,$$
$$h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}h^{\rho\sigma}\,.$$

いま，物質場 φ_A $(A=1,\cdots,N)$ が重力場と相互作用している場合を考えよう．全系の Lagrange 関数は (28.15) のように

$$\boldsymbol{L} = \frac{1}{2c\kappa}\boldsymbol{G} + \boldsymbol{L}_M$$

とおくことができる．ここでは重力場の方程式を出すのに無関係な $\partial_\mu \boldsymbol{D}^\mu$ という項は省略した．$\boldsymbol{L}_M$ は φ_A 場の Lagrange 関数である：

$$\boldsymbol{L}_M \overset{d}{\equiv} \boldsymbol{L}_M(\varphi_A,\ \nabla_\mu\varphi_A,\ g_{\mu\nu}).$$

また $\boldsymbol{G}$ は (22.8) にあたえられている．いまこれらを $\sqrt{\kappa}$ のべき級数に展開し，$\boldsymbol{G}$ は κ に比例する項まで，また $\boldsymbol{L}_M$ は $\sqrt{\kappa}$ の項まで残し他は無視しよう．まず $\boldsymbol{L}_M$ は

$$\boldsymbol{L}_M = \boldsymbol{L}_M(\varphi_A,\ \partial_\mu\varphi_A,\ \eta_{\mu\nu}) + \sqrt{\kappa}\left(\frac{d\boldsymbol{L}_M}{d\sqrt{\kappa}}\right)_{\kappa=0}$$

となる．この第2項はつぎのものと同等である：

$$\sqrt{\kappa}\left(\frac{\delta \boldsymbol{L}_M}{\delta g_{\mu\nu}(x)}\,\frac{dg_{\mu\nu}(x)}{d\sqrt{\kappa}}\right)_{\kappa=0} = -\frac{\sqrt{\kappa}}{2c}\{\boldsymbol{T}^{\mu\nu}(x)\}_{\kappa=0}\cdot h_{\mu\nu}(x)$$
$$= -\frac{\sqrt{\kappa}}{2c}\,T^{\mu\nu}(x)h_{\mu\nu}(x).$$

ここで $T^{\mu\nu}$ は物質の対称エネルギー・テンソル密度 $\boldsymbol{T}^{\mu\nu}$ の中に含まれている κ を0としたものである．つまりこれは特殊相対論の場合の φ_A 場の対称エネルギー・テンソルにほかならない．

$\boldsymbol{G}$ にも (30.1), (30.2) を代入すると，$\boldsymbol{L}$ は結局

$$\boldsymbol{L} = -\frac{1}{8c}(2h_{,\rho}h^{\rho\sigma}{}_{,\sigma} - h_{,}{}^{\rho}h_{,\rho} - 2h^{\mu\nu,\rho}h_{\mu\rho,\nu} + h^{\mu\nu,\rho}h_{\mu\nu,\rho})$$
$$+ \boldsymbol{L}_M(\varphi_A,\ \partial_\mu\varphi_A,\ \eta_{\mu\nu}) - \frac{1}{2c}\sqrt{\kappa}\ T^{\mu\nu}h_{\mu\nu} \qquad (30.3)$$

となる．ここで

$$h \overset{d}{\equiv} \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$$

である．（30.3）の右辺の第2項は特殊相対論における φ_A 場の Lagrange 関数である．（30.3）は Minkowski 空間の中にある2つの場 φ_A と $h_{\mu\nu}$ が相互作用しているときの Lagrange 関数である．$\sqrt{\kappa}$ はその相互作用定数と考えられる．

ここで参考までに，素粒子物理学にでてくる相互作用の強さと重力場のそれとの比較をしてみよう．いま陽子の質量 M_P，Planck の定数を 2π で割った $\hbar$，および光速 c を用いて $\sqrt{\kappa}$ からディメンションのない定数

$$\sqrt{\kappa}\ \sqrt{\frac{(M_P)^2 c^3}{\hbar}} = 3.85 \times 10^{-19}$$

を導くことができる．素粒子論では相互作用定数の2乗に比例するディメンションのない定数をもって相互作用の強さの基準とする．したがって重力の相互作用では，上の数を2乗した

$$\kappa \frac{(M_P)^2 c^3}{\hbar} = 1.48 \times 10^{-37} \tag{30.4}$$

がこれに相当する．

一方，素粒子の相互作用のうち一番弱いものの相互作用定数の2乗から上と同様の手続きで作ったディメンションのない数は 10^{-14} 程度のものである．また，荷電素粒子と電磁場の間の相互作用については，$e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c = 1/137 \approx 10^{-2}$ という数が導かれる．これらを（30.4）と比べるとき，重力場の相互作用のあまりにも小さいのに驚かされる．このような事情から素粒子物理学では重力場との相互作用は普通には無視する．

（30.3）の $h_{\mu\nu}$ に関する変分から弱い重力場に対する方程式が導かれる：

$$\frac{1}{2}\{\Box h^{\mu\nu} + h_{,}{}^{\mu\nu} - h^{\lambda\mu,\nu}{}_{\lambda} - h^{\lambda\nu,\mu}{}_{\lambda} - \eta^{\mu\nu}(\Box h - h^{\rho\sigma}{}_{,\rho\sigma})\} = \sqrt{\kappa}\ T^{\mu\nu}. \tag{30.5}$$

これは Einstein の方程式（21.8）に（30.1），（30.2）のような近似を適用しても導かれることはいうまでもない．

ところでこの式の左右両辺の間にはつぎのような矛盾がある．（30.5）の両

辺を x^ν で微分すると，左辺は恒等的に 0 となる．これは Bianchi の恒等式 (25.1) にほかならない．ところが右辺は 0 とはならない．(30.3) を φ_A について変分をとれば，物質場に対する方程式が導かれる．これは $\sqrt{\kappa}$ に比例した重力場との相互作用の項をもつ．そのために

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = (\sqrt{\kappa}\ \text{に比例する量})$$

となる．したがって (30.5) の右辺の x^ν に関する微分は $\sqrt{\kappa}^2$ に比例する項が残る．もし (30.5) を Einstein の方程式 (21.8) に対する近似式ではなく，$h^{\mu\nu}$ と φ_A の間に成り立つ厳密な方程式とみなすならば，上に述べたことは明らかに矛盾である．しかし実は (30.5) は (21.8) を $\sqrt{\kappa}$ の 1 次までの近似でかいたものである．この近似では $\sqrt{\kappa}^2$ は無視しなければならない．したがって (30.5) は $\sqrt{\kappa}$ の 1 次までの範囲では矛盾をもたない．

ここで，$h_{\mu\nu}$ の代りに

$$\varphi_{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \tag{30.6}$$

という量を使って (30.5) をかきかえてみよう．$\varphi_{\mu\nu}$ と $h_{\mu\nu}$ の関係はつぎのようにもかける：

$$h_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\varphi. \tag{30.6$'$}$$

ここで

$$\varphi = \eta^{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu} = -h.$$

いま $\varphi^{\mu\nu}$ に対して

$$\partial_\mu \varphi^{\mu\nu} = 0 \tag{30.7}$$

という条件をつけよう．これは**調和条件**とか De Donder の条件といわれる

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}\ g^{\mu\nu}) = 0$$

を $\sqrt{\kappa}$ の 1 次までの近似でかき表わしたものである．これを使うと (30.5) は

$$\Box\varphi^{\mu\nu} = 2\sqrt{\kappa}\ T^{\mu\nu} \tag{30.8}$$

となる．(30.7) と (30.8) は前に説明したような意味で矛盾していない．なぜなら

$$\Box\partial_\mu\varphi^{\mu\nu} = 2\sqrt{\kappa}\,\partial_\mu T^{\mu\nu} = \{(\sqrt{\kappa})^2 \text{ の量}\}$$

であるから，右辺は 0 とみなしてよい．

(30.7)，(30.8) は電磁場の方程式

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \qquad \Box A^\mu = -\mu_0 j^\mu$$

と大変よく似ている． そこで， 次の節で $T^{\mu\nu}=0$ の場合について両者の類似がどの程度に成り立っているものか，くわしく調べてみよう．

§ 31. 重 力 波

この節では物質が存在しない領域における (30.8) について調べる．重力場の方程式は

$$\Box\varphi^{\mu\nu} = 0. \tag{31.1}$$

ほかに束縛条件

$$\partial_\mu\varphi^{\mu\nu} = 0 \tag{31.2}$$

がある． $T^{\mu\nu}=0$ のときは上の 2 つの式は厳密に両立する．(31.1) に $\eta_{\mu\nu}$ を掛けると

$$\Box\varphi = 0 \tag{31.3}$$

となる．したがって

$$\Box h^{\mu\nu} = \Box\left(\varphi^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\varphi\right) = \Box\varphi^{\mu\nu} = 0. \tag{31.1$'$}$$

(31.1)，あるいは (31.1)$'$ から，$\varphi^{\mu\nu}$ あるいは $h^{\mu\nu}$ には波動解も存在することがわかる． いま， 星のように巨大な物体が周期的運動， たとえば振動をすると，そのまわりの重力場もこれにともなって振動をはじめるであろう．ちょうど，電荷の振動により起きた電磁波が真空中を伝わるように，重力場の周期的変化も中心の星から遠方に向かって伝播していく．星から十分に離れた場所では重力場は "弱い" とみなせるであろう．その伝播の様子は (31.1) あるいは (31.1)$'$ により表わされる．重力場の振動は，(31.1) が示すように電磁波と同じ速さ c で Minkowski 空間の中を伝播していく．このような重力場の状態を**重力波**という．

重力波の存在は，Einstein によってまず指摘された．彼の考えた重力波は前節から説明してきたような線形近似に基づくものである．その後，このような近似によらなくても，Einstein のもとの方程式の厳密解として波動的振舞を示す解のあることがわかった．しかし本書では，もっぱら線形近似における重力波 $\varphi_{\mu\nu}$ の性質だけをくわしく調べることにする．重力波についてもっと多くのことを知りたければ，J. Weber: "General Relativity and Gravitational Waves": Interscience Publishers, Inc. New York (1961) を見るがよい．この書物には重力波に関する多くの文献のリストもある．なおこの本にはつぎのような邦訳がある．藤田純一訳：一般相対論と重力波（講談社，昭和49年）．

さて (31.3) が成立しているから，もしある瞬間に，たとえば $x^0=0$ において，すべての点 $\vec{x}$ で

$$\varphi = -h = 0,$$
$$\partial_0\varphi = -\partial_0 h = 0$$

が成立するとすれば，それより未来の任意の時刻 $x^0>0$ においても，すべての場所で $\varphi=-h=0$ となる．そこで今後はつぎのような束縛条件を満足する重力波だけを考えよう：

$$\left.\begin{aligned} \partial_\mu\varphi^{\mu\nu} &= 0, \\ \varphi \overset{d}{\equiv} \varphi^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{31.4}$$

この結果，今後は $h_{\mu\nu}=\varphi_{\mu\nu}$ となり，両者の区別は不要となる．

ところでもとの Einstein の方程式は一般座標変換に対して共変な形をしている．ここで特に

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} = x^\mu - \sqrt{\kappa}\,\lambda^\mu(x) \tag{31.5}$$

という変換を考えてみよう．λ^μ は4個の，x の任意関数である．これは Lorentz 変換に対しては反変ベクトルであるとする．(31.5) に応じて $\sqrt{\kappa}$ の1次の近似で，$g_{\mu\nu}$ は

$$g_{\mu\nu}(x) \to g_{\mu\nu}{}'(x') = g_{\mu\nu}(x) + \sqrt{\kappa}\,(g_{\mu\alpha}\lambda^\alpha{}_{,\nu} + g_{\nu\alpha}\lambda^\alpha{}_{,\mu}) + \sqrt{\kappa}\,g_{\mu\nu,\alpha}\lambda^\alpha$$

のように変換される．これを (30.1) にならって

$$g_{\mu\nu}{}'(x') = \eta_{\mu\nu} + \sqrt{\kappa}\,h_{\mu\nu}{}'(x) \tag{31.6}$$

とおく．これを上に導いた式の左辺に代入し，$\sqrt{\kappa}$ に比例する項を比べると，$h_{\mu\nu}(x)$ に対して

$$h_{\mu\nu}(x) \to h_{\mu\nu}'(x) = h_{\mu\nu}(x) + \lambda_{\mu,\nu} + \lambda_{\nu,\mu} \tag{31.7}$$

という変換則が導かれる．

変換（31.7）に対して（30.5）が不変であることは容易にわかる．これはもとの Einstein の方程式が一般座標変換に対して形をかえないことによる．なお（31.7）は電磁場のゲージ変換

$$A_\mu(x) \to A_\mu'(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda \tag{31.7$'$}$$

と，その形がよく似ているので，(31.7) を**重力場のゲージ変換**と呼ぶことにする．

重力波の話をさらにすすめる前に，ここで電磁波の場合を復習してみよう．真空中の電磁波の方程式は

$$\Box A^\mu = 0.$$

別に Lorentz 条件

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

がある．これらがともにゲージ変換（31.7)$'$ に対して不変であるためには，任意関数 $\lambda(x)$ は

$$\Box \lambda = 0 \tag{31.8}$$

を満足しなければならない．

これと同じことが重力波のときにもいえる．重力波の方程式や条件式を $h_{\mu\nu}$ を用いてかきならべると

$$\Box h_{\mu\nu} = 0, \tag{31.1$'$}$$

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0, \tag{31.9}$$

$$h = \eta_{\mu\nu} h^{\mu\nu} = 0 \tag{31.10}$$

となる．これらはすべて上にかいた電磁場の式と全くよく似ている．ただ（31.10）だけは電磁場にはなかった条件である．

そこで電磁場を手本として（31.1)$'$,（31.9),（31.10）を不変にするゲージ変換を考えてみよう．変換（31.7）に対して（31.10）が不変なためには

$$h' = h + 2\partial_\mu \lambda^\mu = 2\partial_\mu \lambda^\mu = 0$$

となる必要がある．すなわち，λ^μ はまず

$$\partial_\mu \lambda^\mu = 0 \tag{31.11}$$

を満足すればよい．つぎに（31.9）は

$$\partial_\mu h^{\mu\nu\prime} = \partial_\mu h^{\mu\nu} + \Box \lambda^\nu + \partial^\nu(\partial_\mu \lambda^\mu) \tag{31.12}$$

となる．そこで（31.9）が変換（31.7）に対して不変なためには，λ^μ はさらに

$$\Box \lambda^\mu = 0 \tag{31.13}$$

を満足する必要がある．（31.13）は電磁波の場合の（31.8）と同じ条件である．

このように電磁波と重力波とは非常によく似た性質をもっている．唯一の違いは電磁波がベクトル場で表わされるのに対して，重力波は対称テンソル場で記述されるという点である．その結果，電磁波のときにはなかった条件（31.10）や（31.11）が重力波の場合にはつけ加わる．しかし，これら両者の類似点のなかで特におもしろいことは，電磁波と同じように重力波も横波で，2つの独立な偏光状態をもつという点である．これを以下に説明しよう．

(31.1)′ の平面波解

$$h_{\mu\nu}(x) = a_{\mu\nu} e^{ikx} \tag{31.14}$$

を考えてみよう．ここで右辺の e の右肩の kx とは

$$kx = k_\rho x^\rho$$

のことである．k_ρ は波数ベクトルの成分を表わす定数である．（31.14）が (31.1)′ を満足するためには

$$k_\rho k^\rho = 0$$

でなければならない．ここで空間座標軸の方向を適当にとって k_ρ が

$$k_1 = k_2 = 0, \qquad k_3 = k^0 = -k_0 = k \tag{31.15}$$

となるようにする．条件（31.9）のために振幅 $a_{\mu\nu}$（もちろんこれは x には無関係な定数）は

$$k_\mu a^{\mu\nu} = k(a^{3\nu} - a^{0\nu}) = 0 \tag{31.16}$$

という条件を満たさねばならない．したがって，1次独立な成分はつぎの6個

である：

$$a^{00},\quad a^{01},\quad a^{02},\quad a^{11},\quad a^{12},\quad a^{22}. \tag{31.16$'$}$$

残りの成分はすべて (31.16)′ のいずれかと一致する．

次に (31.10) により

$$\eta_{\mu\nu}a^{\mu\nu} = -a^{00} + a^{11} + a^{22} + a^{33} = 0.$$

しかし $a^{00} = a^{33}$ であるから，上の関係式は結局

$$a^{11} + a^{22} = 0 \tag{31.17}$$

となる．したがって (31.16)′ のなかで真に1次独立なものは，右端の a^{22} をはずした残りの5個である．

ここで重力場のゲージ変換 (31.7) を考えよう．特に

$$\lambda^{\mu}(x) = C^{\mu}e^{ikx}$$

とおく．ここで k_{ρ} は (31.15) と同じものとする．したがって (31.13) は満たされている．また，未定の振幅 C^{μ} は条件 (31.11) のために

$$k_{\mu}C^{\mu} = k(C^{3} - C^{0}) = 0 \tag{31.18}$$

を満たさねばならない．このような λ^{μ} に対しては，$a_{\mu\nu}$ が $a_{\mu\nu}'$ に変わっても (31.16) や (31.17) という関係式がもとのままの形を保つことはいうまでもない．

さて，k_{μ} の0でない成分は k_3 と k_0 だけであるから，ゲージ変換を行なっても a_{11}, a_{12}, a_{22} は不変である．これに対して0あるいは3という添字をもつ成分は変化する．たとえば

$$a_{00} \to a_{00}' = a_{00} + 2ik_0C_0,$$
$$a_{0j} \to a_{0j}' = a_{0j} + ik_0C_j \qquad (j = 1, 2).$$

そこで振幅 C_{μ} を適当にとって $a_{00}', a_{01}', a_{02}'$ を0にすることができる．たとえば

$$C_0 = -i\frac{a_{00}}{2k} = -C^{0} = -C^{3},$$

$$C_j = C^{j} = -i\frac{a_{0j}}{k} \qquad (j = 1, 2)$$

とすれば $a_{00}' = 0$,　$a_{0j}' = 0\,(j = 1, 2)$ となる．このような λ_{μ} を用いたゲージ変換により，あとに残る0でない成分は，結局

$$a_{11}(=-a_{22}), \qquad a_{12}(=a_{21})$$

の2個だけとなる．したがって，ゲージ変換に対して不変な波動解で，(31.15) という波数ベクトルをもつものは

$$a_{11}\exp\{ik(z-x^0)\}, \qquad a_{12}\exp\{ik(z-x^0)\} \tag{31.19}$$

の2つに限られる．電磁波の横波に2つの独立な偏光状態が存在したように，重力波の場合にもこれら2つの解だけが物理的に意味のある解である．10個の $a_{\mu\nu}$ のなかで上述の2個以外の成分は，ゲージ変換により0にすることもできるし，0でない任意の値をもたせることも可能である．これらの値は全く見かけのもので物理的には無意味な成分である．なお，(31.19) の添字からわかるように，これらの振幅はいずれも波の進む方向，つまり x^3–軸に垂直な成分である．したがって (31.19) は確かに横波を表わしている．

ここで平面波 (31.19) の性質をもう少しくわしく知るために，x^3–軸を軸として空間座標系を θ だけ回転してみよう．いま，任意の点の回転前後の座標をそれぞれ $x^\mu, x^{\mu\prime}$ とすれば，これらの間にはつぎの関係が成り立つ：

$$\left.\begin{aligned} x^{1\prime} &= x^1\cos\theta + x^2\sin\theta, & x^{0\prime} &= x^0, \\ x^{2\prime} &= -x^1\sin\theta + x^2\cos\theta, & x^{3\prime} &= x^3. \end{aligned}\right\} \tag{31.20}$$

$h^{\mu\nu}(x)$ (したがって $a^{\mu\nu}$) は Lorentz 変換に対してはテンソルとして変換されるから

$$\left.\begin{aligned} h^{11\prime}(x) &= h^{11}(x)\cos 2\theta + h^{12}(x)\sin 2\theta, \\ h^{12\prime}(x) &= -h^{11}(x)\sin 2\theta + h^{12}(x)\cos 2\theta \end{aligned}\right\} \tag{31.21}$$

となる．ここで $h^{11}=-h^{22}, h^{12}=h^{21}$ を用いた．(31.21) を (31.20) と比べると，座標系を θ だけ回転したのに対し，h^{11}, h^{12} をそれぞれ x，y 成分とする2成分の量は 2θ だけ回転することがわかる．あるいは

$$\left.\begin{aligned} h^{(+)}(x) &= h^{11} + ih^{12}, \\ h^{(-)}(x) &= h^{11} - ih^{12} \end{aligned}\right\} \tag{31.22}$$

とおけば，回転 (31.20) に対して

$$\left.\begin{aligned} h^{(+)}(x) &\to h^{(+)\prime} = e^{-i2\theta}h^{(+)}, \\ h^{(-)}(x) &\to h^{(-)\prime} = e^{+i2\theta}h^{(-)} \end{aligned}\right\} \tag{31.21$'$}$$

という変換をこうむる．

これに対して電磁場のときはつぎのようになる．x^3-軸の方に進む電磁波を

$$A^\mu(x) = a^\mu \exp\{ik(z - x^0)\} \qquad (a^3 = a^0 = 0)$$

とする．

$$A^{(\pm)}(x) = A^1 \pm iA^2$$

とおけば，回転（31.20）に対して

$$A^{(\pm)}(x) \to A^{(\pm)\prime}(x) = e^{\mp i\theta} A^{(\pm)}(x) \tag{31.23}$$

となる（複号はすべて同順）．

（31.23）と（31.21）$'$を比べると，上に述べたようにベクトル A^μ のときは，回転により $\exp(\mp i\theta)$ が現われるが，テンソル $h^{\mu\nu}$ の場合にはこの位相が2倍となる．これは重力場と電磁場の大きな違いである．電磁場が量子化されると光量子ができる．これのスピンは1である．同様に弱い重力場を量子化すると光量子とよく似た**重力量子**がうまれる．これのスピンは2である．上に述べた位相角の関係は量子論的にいえば，両種の量子のスピンのちがいを表わしている．この事情をもっと一般的に研究したものが Fierz および Pauli の論文である．*

§ 32. 重力波の放射

つぎに物質から重力波が放射される問題を考えてみよう．この場合の基礎方程式は（30.8），すなわち

$$\Box \varphi^{\mu\nu} = 2\sqrt{\kappa}\ T^{\mu\nu} \tag{32.1}$$

である．ここで考えている近似では

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{32.2}$$

が成立する．したがって，条件

$$\partial_\mu \varphi^{\mu\nu} = 0 \tag{32.3}$$

を設けることができる．しかし $\varphi = 0$ とおくことは $\eta_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = 0$ でないかぎり許されない．

---

* M. Fierz and W. Pauli: Proc. Roy. Soc. (London) **173** (1939) 211.

さて，遅延グリーン関数 $G(x)$ を

$$\Box G(x)=\delta^4(x)\overset{d}{\equiv}\delta(x^0)\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3),$$

$$\text{ただし,}\quad x^0<0\ \text{では}\quad G(x)=0$$

により定義する．上の定義を満たす $G(x)$ は

$$G(x)=-\frac{1}{4\pi r}\delta(r-x^0),$$

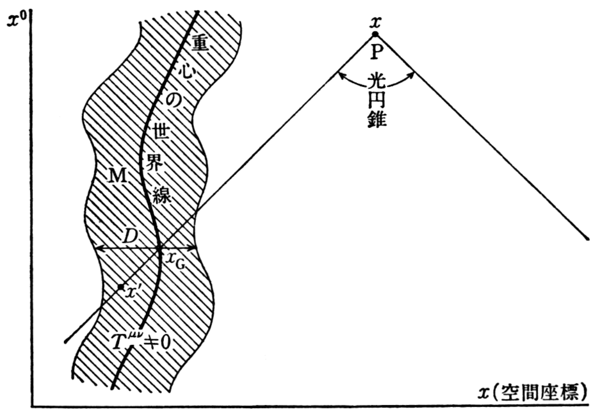
$$r=\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}=|\vec{x}|$$

である（$r\to\infty$ とともに $G\to 0$ という条件もつけた）．

G を使うと（32.1）の特解として

$$\varphi^{\mu\nu}(x)=-\frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi}\int\frac{T^{\mu\nu}\{\vec{x}',\ x^{0\prime}=x^0-|\vec{x}-\vec{x}'|\}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x' \quad (32.4)$$

となる．これは $T^{\mu\nu}$ だけによりうみだされた重力場で，因果律の要請を満たすという条件を満足する解である．一般には（32.4）の右辺に $\Box\varphi^{\mu\nu}=0$ を満足する一般解を付け加えねばならない．しかし上に述べた条件からこの追加項はいまの例では 0 となる．（32.4）は電磁場の場合の**遅延ポテンシャル**と



第 10 図

全く同じ形をしている．

さて**第10図**において，任意の1点 P（その座標を x）における $\varphi^{\mu\nu}$ の値を

求めてみよう．図の斜線の部分 M は $T^{\mu\nu} \neq 0$ の領域を表わす．M の外では $T^{\mu\nu}$ は 0 であるとする．したがって，(32.4) の積分に効く点 x' は，P を頂点とし過去の方に開いた光円錐と M の交差した部分に属するものだけである．

ここで M の幅 D に比べて，物質の重心 G と点 P の間の距離ははるかに大きいとする．また，重力波の波長 λ についても $\lambda \gg D$ と仮定する．このような仮定のもとでは (32.4) をもっとわかりやすい形にかき直すことができる．その方法は電磁波の放射を，双極子放射，四極子放射，… 等の和に展開するのと同じ計算法である．

さて，物質系の重心 G の4次元的軌跡，つまり G の世界線が，P を頂点とした過去向きの光円錐面を貫く点の空間的位置を $\vec{x}_G$，その時刻を $x^0{}_G$ とする．さらに

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}_G, \qquad \vec{r}' = \vec{x}' - \vec{x}_G$$

とおく．上に述べた $x^0{}_G$ の定義から

$$x^0{}_G = x^0 - |\vec{x} - \vec{x}_G| = x^0 - r$$

という関係が成り立つ．*

そこでまず (32.4) の分母から考えよう．

$$|\vec{x} - \vec{x}'|^{-1} = |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} = \{r^2 - 2(\vec{r}\vec{r}') + (r')^2\}^{-\frac{1}{2}}$$
$$= r^{-1}\left\{1 + \frac{(\vec{r}\vec{r}')}{r^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 + \frac{3}{2}\frac{(\vec{r}\vec{r}')^2}{r^4} + \cdots\right\}. \quad (32.5)$$

つぎに分子は

$$T^{\mu\nu}(\vec{x}', x^0 - |\vec{x} - \vec{x}'|) = T^{\mu\nu}(\vec{x}', x^0 - |\vec{r} - \vec{r}'|)$$
$$= T^{\mu\nu}\left(\vec{x}', x^0 - r + \frac{(\vec{r}\vec{r}')}{r} - \frac{(r')^2}{2r} + \frac{(\vec{r}\vec{r}')^2}{2r^3} - \cdots\right).$$

これを，時刻 $x^0{}_G = x^0 - r$ を中心として，時間について Taylor 級数に展開すると

$$T^{\mu\nu}(\vec{x}', x^0 - |\vec{x} - \vec{x}'|) = T^{\mu\nu}(\vec{x}', x^0{}_G)$$

---

* G の運動はあらかじめ $\vec{x}_G = \vec{f}(t)$ という形にあたえられているものとする．したがって，$x^0{}_G$ の定義は $x^0{}_G = x^0 - |\vec{x} - \vec{f}(x^0{}_G)|$ となる．つまり $x^0{}_G$ は点 P の座標 x の関数である．

$$+\left\{\frac{(\overrightarrow{rr'})}{r}-\frac{(r')^2}{2r}+\frac{(\overrightarrow{rr'})^2}{2r^3}-\cdots\right\}\partial_0 T^{\mu\nu}(\vec{x}',\ x^0{}_G)$$

$$+\frac{1}{2!}\left\{\frac{(\overrightarrow{rr'})}{r}-\frac{(r')^2}{2r}+\frac{(\overrightarrow{rr'})^2}{2r^3}-\cdots\right\}^2\partial_0\partial_0 T^{\mu\nu}(\vec{x}',\ x^0{}_G)$$

$$+\cdots. \tag{32.6}$$

ところで仮定によれば

$$r \gg D \gtrsim r'$$

であるから，r'/r の最低次の項だけを残し他は無視すると，(32.4)，(32.5)，(32.6) から

$$\varphi^{\mu\nu}(x)=-\frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi}\left[\frac{1}{r}\int T^{\mu\nu}(\vec{x}',\ x^0{}_G)d^3x'\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\frac{r^i}{r^2}\int r^{i\prime}\partial_0 T^{\mu\nu}(\vec{x}',\ x^0{}_G)d^3x'$$

$$\left.+\sum_{i,k=1}^{3}\frac{r^i r^k}{2r^3}\int r^{i\prime}r^{k\prime}\partial_0\partial_0 T^{\mu\nu}(\vec{x}',\ x^0{}_G)d^3x'+\cdots\right] \tag{32.7}$$

となる．この右辺の ∂_0 は $x^0{}_G$ に関する微分を示す．

ところで (32.7) の被積分関数に含まれる $T^{\mu\nu}$ を $x^0{}_G$ について Fourier 展開したとする．その代表項として $\exp(i\omega x^0{}_G/c)$ という因子をもつ項を考えてみよう．(32.7) の右辺の第 2，第 3 積分にこの項を代入すると，被積分関数はそれぞれ

$$r^{i\prime}\frac{\omega}{c},\qquad r^{i\prime}r^{k\prime}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

に比例する．いま角振動数が ω の重力波の波長を λ とすれば $\omega/c=2\pi/\lambda$ である．したがって，上の 2 つの量はそれぞれ

$$2\pi\frac{r^{i\prime}}{\lambda},\qquad (2\pi)^2\frac{r^{i\prime}r^{k\prime}}{\lambda^2}$$

となる．一般に (32.7) の展開をさらに進めるとき，r'/r の 1 次の量だけに着目すれば，

$$\sum_{i\cdots n}\frac{r^i\cdots r^n}{r^{n+1}}\int r^{i\prime}\cdots r^{n\prime}(\partial_0)^n T^{\mu\nu}(\vec{x}',\ x^0{}_G)d^3x'$$

という項が後につづく．この被積分関数には r' について n 次の同次式が因数

として含まれる．$T^{\mu\nu}$ に上述の Fourier 展開をほどこすと，それは

$$(2\pi)^2 \frac{r^{i'} \cdots r^{n'}}{\lambda^n}$$

に比例する．ところで仮定により，$T^{\mu\nu}$ の作る重力波の波長 λ は $\lambda \gg D \geq r'$ である．そこでこれからは (32.7) の展開で $+\cdots$ の項はすべて省略することにする．

(32.7) の右辺の各項は，さらに物理的意味のわかりやすい形にかきかえることができる．まず

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{32.2}$$

を考えてみよう．ここでもラテン字は 1, 2, 3 を，ギリシャ字の添字は 0, 1, 2, 3 を表わすとする．ν の代りに $k = 1, 2, 3$ とすれば，(32.2) は

$$\partial_0 T^{0k} = -\sum_{l=1}^{3} \partial_l T^{lk}.$$

両辺に x^i を掛けて $x^0 =$ 一定 の条件のもとに空間積分を行うと

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^i \partial_0 T^{0k} d^3x = -\int_{-\infty}^{\infty} x^i \sum_{l=1}^{3} \partial_l T^{lk} d^3x.$$

部分積分により

$$= -\int \sum_{l=1}^{3} x^i T^{lk} d\sigma_l + \int_{-\infty}^{\infty} T^{ik} d^3x.$$

この第 1 項は全 3 次元空間を包む閉曲面上の表面積分である．しかし第 10 図からわかるように，そこでは T^{lk} は 0 であるから，結局

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^i \partial_0 T^{0k} d^3x = \int_{-\infty}^{\infty} T^{ik} d^3x \tag{32.8}$$

となる．あるいは左辺を i, k について対称化して

$$\int T^{ik} d^3x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (x^i \partial_0 T^{0k} + x^k \partial_0 T^{0i}) d^3x \tag{32.8$'$}$$

となる．

つぎに (32.2) の ν を 0 とおき，両辺に $x^i x^k$ を掛けて空間積分すると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^i x^k \partial_0 T^{00} d^3x = -\sum_{l=1}^{3} \int_{-\infty}^{\infty} x^i x^k \partial_l T^{l0} d^3x.$$

(32.8)′を導いたのと同じ考え方によれば上の右辺は

$$= -\sum_{l=1}^{3}\int x^i x^k T^{l0}\, d\sigma_l + \int_{-\infty}^{\infty}(x^k T^{i0} + x^i T^{k0})d^3x$$

となる．この第1積分も前の場合と同様に0となる．そこで

$$\frac{1}{2}\partial_0\partial_0\int_{-\infty}^{\infty} x^i x^k T^{00}\, d^3x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(x^k\partial_0 T^{i0} + x^i\partial_0 T^{k0})d^3x.$$

これに (32.8)′を使うと，$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ に注意して

$$\int_{-\infty}^{\infty} T^{ik}\, d^3x = \frac{1}{2}\partial_0\partial_0\int_{-\infty}^{\infty} x^i x^k T^{00}\, d^3x. \tag{32.9}$$

また，(32.2) の $\nu = 0$ とした式に x^i を掛けて空間積分すれば，上と全く同じ推論から

$$\int_{-\infty}^{\infty} T^{0i}\, d^3x = \partial_0\int_{-\infty}^{\infty} x^i T^{00}\, d^3x \tag{32.10}$$

となる．

これらを (32.7) に代入すると

$$\varphi^{ik}(x) = -\frac{\sqrt{\kappa}}{4\pi r}\partial_0\partial_0\int x^{i\prime}x^{k\prime}T^{00}(\vec{x}', x^0{}_G)d^3x' + \cdots, \tag{32.11}$$

$$\varphi^{0k}(x) = -\frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi r}\Big[\partial_0\int x^{k\prime}T^{00}(\vec{x}', x^0{}_G)d^3x'$$
$$+\sum_{l=1}^{3}\frac{r^l}{r}\int r^{l\prime}\partial_0 T^{0k}(\vec{x}', x^0{}_G)d^3x' + \cdots\Big]. \tag{32.12}$$

この第2積分は (32.2) を使うと

$$\int r^{l\prime}\partial_0 T^{0k}(\vec{x}', x^0{}_G)d^3x' = -\sum_{i=1}^{3}\int r^{l\prime}\partial_i{}' T^{ik}(\vec{x}', x^0{}_G)d^3x'.$$

部分積分により

$$= \int T^{lk}(\vec{x}', x^0{}_G)d^3x$$

$$= \frac{1}{2}\partial_0\partial_0\int x^{l\prime}x^{k\prime}T^{00}(\vec{x}', x^0{}_G)d^3x'.$$

したがって (32.12) は

$$\varphi^{0k}(x) = -\frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi r}\Big[\partial_0\int x^{k\prime}T^{00}\, d^3x'$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{3}\frac{r^l}{r}\partial_0\partial_0\int x^{l\prime}x^{k\prime}T^{00}\,d^3x'+\cdots\Bigg]$$

(32.12)′

となる．最後に φ^{00} も同じ考え方によりつぎのようにかきかえられる：

$$\varphi^{00}(x)=-\frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi r}\Bigg[\int T^{00}(\vec{x}',\,x^0{}_G)d^3x'+\sum_{l=1}^{3}\frac{r^l}{r}\,\partial_0\int x^{l\prime}T^{00}(\vec{x}',\,x^0{}_G)d^3x'$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3}\frac{r^jr^k}{r^2}\partial_0\partial_0\int x^{j\prime}x^{k\prime}T^{00}(\vec{x}',\,x^0{}_G)d^3x'+\cdots\Bigg].\qquad(32.13)$$

これらの結果をみると $\varphi^{\mu\nu}$ はすべて T^{00} を用いた積分でかき表わされている．ところで線形近似では $T^{00}=-T^0{}_0=-$(物質のエネルギー密度) $=-c^2$ ×(物質の広い意味での質量密度）と考えられる．そこで，(32.11)〜(32.13) はつぎのように解釈できる．まず，(32.11) の積分は物質の質量分布にもとづく4極子能率に $(-c^2)$ を掛けたものである．したがって，φ^{ik} は源の物質の時刻 $x^0{}_G$ における質量の4極子能率の時間に関する2階微分に比例する．これに対して φ^{0k} は，それを多極子放射による部分波に分解したとき，双極子放射からはじまる．また φ^{00} も同様に部分波に分けるとき，そのスタートの項は (32.13) の示すように Newton の重力ポテンシャルに比例する量である．いま，源の物質の全質量 M が時間にかかわらず一定とすれば*

$$\int T^{00}\,d^3x=-c^2M$$

とおくことができる．したがって，(32.13) の第1項は

$$\varphi^{00}=+\frac{\sqrt{\kappa}\,c^2}{2\pi r}M.$$

いま質量が，固定された重心のまわりに球対称に近い状態で分布しているとすれば，その重心を中心とした多極子能率はすべて無視してよかろう．したがって $\varphi^{ik}=0$, $\varphi^{0k}=0$ とおくことができる．そこで

$$h^{00}=\varphi^{00}+\frac{1}{2}(\varphi^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu})\approx\frac{1}{2}\varphi^{00},$$

すなわち

---

* (32.2) を仮定しているから，この仮定は許されるものである．

$$g_{00} \approx \eta_{00} + \sqrt{\kappa}\, h_{00} \approx -1 + \frac{\sqrt{\kappa}}{2}\varphi^{00}$$

$$\approx -1 - \frac{2}{c^2}\left(-\frac{GM}{r}\right) = \eta_{00} - \frac{2}{c^2}\phi .$$

ここで ϕ は Newton の重力ポテンシャルである.* この結果はまさに (17.6) にほかならない. (32.13) の第2積分は質量の双極子能率の時間的変化にもとづく項であり, 第3項においてはじめて4極子放射が顔をだす.

ところで次の節で具体的に示すように, 重力波が運び去るエネルギーを計算してみると, φ^{00} や φ^{0k} に含まれている Newton 型のポテンシャルや双極子放射の項はエネルギーの運搬には効かないことがわかる. 無限の遠方までエネルギーを持ち運ぶ重力波は4極子放射, あるいはそれより高次の多極子放射にもとづく波である. 電磁波の場合, エネルギーを持ち去る波のうち最低次のものは双極子放射による波である. 電磁波とのこの違いの原因は, 電磁波が保存則に従う4元ベクトル量である電流密度 j^μ から放射されるのに対して, 重力波は同じく保存則を満たす2階対称テンソル $T^{\mu\nu}$ から放射されるということである.

§33. 調和振動子からの重力波放射

前節に説明したように重力波 $\varphi^{\mu\nu}$ を計算するには, その源の物質系の T^{00} がわかっていればよい. そこでこれから N 個の質点系を考えよう. その第 a 番目の質点の質量を, m_a ($a=1, 2, \cdots, N$), その4次元座標を $\xi_a{}^\mu$ とする. 各質点の速度はすべて c に比べて無視できるほどに小さいとする. また, 質点同士の相互作用エネルギーも各質点の静止エネルギーの和に比べれば無視できるほどに小さいとする. そこで時刻 x^0 に, 場所 $\vec{x}$ における質点系のもつエネルギー密度 $T^{00}(x)$ は近似的に

$$T^{00}(\vec{x}, x^0) = -T^0{}_0(\vec{x}, x^0)$$

$$= -\sum_{a=1}^{N} m_a c^2 \delta\{\vec{x} - \vec{\xi}_a(t)\} \tag{33.1}$$

---

* (17.6) では $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ とおいた. つまり, (本節の $h_{\mu\nu}$) × $\sqrt{\kappa}$ が§17の $h_{\mu\nu}$ である.

とおいてさしつかえない．ここで $\delta(\vec{x}-\vec{\xi})$ とは

$$\delta(x^1-\xi^1)\delta(x^2-\xi^2)\delta(x^3-\xi^3)$$

のことである．

(33.1) を (32.11) に代入し，4極子放射より高次のものはすべて無視することにすれば

$$\varphi^{ik}(x)=\frac{\sqrt{\kappa}}{4\pi r}\left(\frac{d}{dt_G}\right)^2\left\{\sum_{a=1}^{N}m_a c^2\xi_a{}^i(t_G)\xi_a{}^k(t_G)\right\} \tag{33.2}$$

となる．ここで $\vec{x}_G$，$t_G=x^0{}_G/c$ は

$$\vec{x}_G(t_G)\overset{d}{\equiv}\sum_{a=1}^{N}m_a\vec{\xi}_a(t_G)\Big/\sum_{b=1}^{N}m_b$$

$$x^0{}_G=ct_G=x^0-r,\qquad r=|\vec{x}-\vec{x}_G(t_G)|$$

によりあたえられる．

(33.1) を (32.12)′ に代入すれば，上と同じ近似では

$$\varphi^{0k}(x)=\frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi r}c\sum_{a=1}^{N}m_a\frac{d\xi_a{}^k(t_G)}{dt_G}+\sum_{l=1}^{3}\frac{r^l}{r}\varphi^{lk}(x)$$

となる．ここで

$$r^l=x^l-x^l{}_G.$$

上の式の右辺の第1項の $\sum_a$ は時刻 t_G における物質系の全運動量を示す：

$$P^k(t_G)=\sum_{a=1}^{N}m_a\frac{d\xi_a{}^k(t_G)}{dt_G}.$$

いまここで考えている近似では，保存則

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}=0$$

が成立する．したがって

$$P^k=-\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty}T^{0k}d^3x=\text{一定}$$

となる．そこで

$$\varphi^{0k}(x)=\frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi r}cP^k+\sum_{l=1}^{3}\frac{r^l}{r}\varphi^{lk}(x). \tag{33.3}$$

最後に (32.13) から

$$\varphi^{00}(x)=\frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi r}\left[\sum_{a=1}^{N}m_a c^2+\sum_{l=1}^{3}\frac{r^l}{r}c\sum_{a=1}^{N}m_a\frac{d\xi_a{}^l(t_G)}{dt_G}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3}\frac{r^j r^k}{r^2}\left(\frac{d}{dt_G}\right)^2\sum_{a=1}^{N}m_a\xi_a{}^j(t_G)\xi_a{}^k(t_G)\right].$$

この右辺の第2，第3項を，(33.2)，(33.3) を使ってかき直すと

$$\varphi^{00}(x)=\frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi r}Mc^2+\frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi r^2}c\sum_{k=1}^{3}r^k P^k+\sum_{j,k=1}^{3}\frac{r^j r^k}{r^2}\varphi^{jk}(x)$$
$$=\frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi r}Mc^2+\sum_{k=1}^{3}\frac{r^k}{r}\varphi^{0k}(x) \qquad (33.4)$$

となる．ここで M は質点系の全質量

$$M=\sum_{a=1}^{N}m_a$$

である．

さて，仮定によりこの質点系は近似的にその全エネルギー・全運動量が一定である．したがって Lorentz 変換により質点系の重心 $\vec{x}_G$ が常に空間座標の原点に静止しているようにすることができる．そこで今後はすべての時刻に

$$\vec{x}_G=\frac{\sum_{a=1}^{N}m_a\vec{\xi}_a}{M}=0$$

とする．したがって

$$\vec{r}=\vec{x}-\vec{x}_G=\vec{x}, \qquad \vec{r}'=\vec{x}'-\vec{x}_G=\vec{x}'$$

である．$\vec{x}_G$ を t_G で微分すると

$$\vec{P}=\sum_{a=1}^{N}m_a\frac{d\vec{\xi}_a(t_G)}{dt_G}=M\frac{d\vec{x}_G}{dt_G}=0.$$

したがって，(33.3) から

$$\varphi^{0k}(x)=\sum_{l=1}^{3}\frac{x^l}{r}\varphi^{lk}(x). \qquad (33.3)'$$

また，(33.4) から

$$\varphi^{00}(x)=\frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi r}Mc^2+\sum_{k,l=1}^{3}\frac{x^k x^l}{r^2}\varphi^{kl}(x) \qquad (33.4)'$$

となる．

ここで話を簡単にするために質量が m の質点がただ2個だけの質点系を考える．これらの座標 $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2$ は

$$\vec{\xi}_1(t)=\vec{A}\cos\frac{\omega}{2}t=-\vec{\xi}_2(t) \tag{33.5}$$

とする．また振幅 $\vec{A}$ は z-軸の正の向きを向いているものとする．すなわち $A_1=A_2=0$, $A_3=A$ とする．(33.5) から，重心 $\vec{x}_G$ は常に原点に一致している．T^{00} は

$$T^{00}(\vec{x},t)=-mc^2\delta(x)\delta(y)\left[\delta\left(z-A\cos\frac{\omega}{2}t\right)+\delta\left(z+A\cos\frac{\omega}{2}t\right)\right] \tag{33.6}$$

となる．

ベクトル $\vec{\xi}_1(=-\vec{\xi}_2)$ は，その第3成分だけが0でないから (33.2) により，$\varphi^{33}\neq 0$, 他は $\varphi^{ik}=0$ である．いま x-軸（あるいは y-軸）を軸とするこの質点系の慣性能率の（質点の振動の）1周期にわたる平均を I とすると

$$I=\frac{1}{T_0}\sum_{a=1}^{2}\int_0^{T_0}m_a\{\xi_a{}^3(t)\}^2dt=mA^2,$$

$$T_0=\frac{2\pi}{\omega/2}$$

となる．これを用いて $\varphi^{\mu\nu}$ をかくと，0でない成分は

$$\left.\begin{aligned}
\varphi^{33}(\vec{x},t)&=-\frac{I\sqrt{\kappa}}{4\pi r}\omega^2\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right),\\
\varphi^{03}(\vec{x},t)&=\cos\theta\cdot\varphi^{33}(\vec{x},t),\\
\varphi^{00}(\vec{x},t)&=\frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi r}2mc^2+\cos^2\theta\cdot\varphi^{33}(\vec{x},t)
\end{aligned}\right\} \tag{33.7}$$

だけである．ここで θ は $\vec{x}$ と z-軸の間の角である．すなわち

$$z=r\cos\theta$$

である．この結果で特におもしろいことは，質点系が角振動数 $\omega/2$ で振動しているのに，放射される重力波の角振動数は ω であるということである．これ

は4極子放射の特徴である.

これから，重力波により無限遠方に運び去られるエネルギーを計算してみよう.

まず，全系のエネルギー・運動量の保存則は，(29.3) から

$$\partial_\mu(\boldsymbol{T}^\mu{}_\nu + \boldsymbol{t}^\mu{}_\nu) = 0. \tag{29.3}$$

(注意： 物質系の対称エネルギー・テンソル密度に対し，ここでは再び§21と同様に $\boldsymbol{T}^{\mu\nu}$ という記号を使う.) これは厳密に成り立つ式である．これを空間座標の原点を中心とする半径 r の大きな球 (V) の中で空間積分すると，$\nu=0$ に対して

$$\partial_0\int_V(\boldsymbol{T}^0{}_0 + \boldsymbol{t}^0{}_0)d^3x = -\int_S(\boldsymbol{T}^k{}_0 + \boldsymbol{t}^k{}_0)d\sigma_k$$

となる．右辺は球の表面 S 上の積分を示し，$d\sigma_k(k=1, 2, 3)$ は面積素片

$$d\sigma_k = rx^k d\omega \qquad (k=1, 2, 3)$$

を意味する． ここで x^k は球面上の点の3次元座標， $d\omega$ は無限小立体角を示す．半径 r が物質系のさしわたし $2A$ よりもはるかに大きければ，S 上の $\boldsymbol{T}^k{}_0$ は0である.

いま， 上の式を重力波の1周期 $T=2\pi/\omega$ にわたり時間について積分すると

$$\int_V(\boldsymbol{T}^0{}_0 + \boldsymbol{t}^0{}_0)_{t+T}\,d^3x - \int_V(\boldsymbol{T}^0{}_0 + \boldsymbol{t}^0{}_0)_t\,d^3x$$
$$= -\int_t^{t+T}dt\cdot c\int_S\boldsymbol{t}^k{}_0\,d\sigma_k.$$

ところで，重力波 $\varphi^{\mu\nu}$ が1周期たったのちには，その値は再びもとの値にもどるから

$$\int_V(\boldsymbol{t}^0{}_0)_{t+T}\,d^3x - \int_V(\boldsymbol{t}^0{}_0)_t\,d^3x = 0$$

である．したがって

$$-\left\{\int_V(\boldsymbol{T}^0{}_0)_{t+T}\,d^3x - \int_V(\boldsymbol{T}^0{}_0)_t\,d^3x\right\} = c\int_t^{t+T}dt\left(\int_S\boldsymbol{t}^k{}_0\cdot d\sigma_k\right) \tag{33.8}$$

となる．この右辺は時刻 t から $t+T$ までの間に表面 S を通って重力波が V

の外に持ち去るエネルギーの総量を示す．また，左辺はこの間に物質系の失ったエネルギー量を示す．

ここで $T^0{}_0$ として，もし近似式（33.6）を用いれば（33.8）の左辺は0となる．なぜならば，（33.6）は調和振動子のエネルギー密度として静止エネルギーだけを考慮にいれたものである．したがって質点系の全エネルギーは時間的に一定となり，（33.8）の左辺が0となるのは当然である．これが0でない値をもつためには，質点の振動のエネルギーや，振動の原因である弾性のエネルギー（つまり質点のポテンシャル・エネルギー）を考慮にいれる必要がある．しかしそのようにしても，質点の運動が周期的運動ならば（33.8）の左辺は0となる．（33.8）の右辺のようなエネルギーの流失がある以上，質点の運動は厳密には周期的ではありえない．必ず振幅の緩やかな減衰があるはずである．そこで振幅の減衰の係数を $\mu/2$ とし，振動の1周期の間にはほとんど減衰は無視できるほどに小さいとする．つまり

$$\frac{\mu}{2}T_0=\frac{2\pi\mu}{\omega}\ll 1$$

とする．したがって $\vec{\xi}_a(a=1,2)$ は厳密には（33.5）の代りに，つぎのようにおくべきである：

$$\vec{\xi}_1(t)=\vec{A}e^{-\frac{\mu}{2}t}\cos\frac{\omega}{2}t=-\vec{\xi}_2(t). \tag{33.5$'$}$$

また $T^0{}_0$ としては，（33.6）の代りに厳密な定義式（18.11）を用いる：

$$T^0{}_0(\vec{x},t)=\sum_{a=1}^{2}mc\int\left(\frac{d\xi_a{}^0}{d\tau_a}\right)^2\delta^4(x-\xi_a)d\tau_a.$$

τ_a に関する積分はすぐにできて

$$T^0{}_0(\vec{x},t)=\sum_{a=1}^{2}mc\frac{d\xi_a{}^0}{dt}\frac{\delta\{\vec{x}-\vec{\xi}_a(t)\}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{d\vec{\xi}_a}{c\,dt}\right)^2}}$$

となる．ここで $\xi_a{}^0(t)=x^0=ct$ である．

したがって

$$\int_V T^0{}_0(\vec{x},t)d^3x=mc^2\sum_{a=1}^{2}\left\{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\vec{\xi}_a(t)}{dt}\right)^2\right\}^{-1/2}$$

$$\approx 2mc^2 + 2\cdot\frac{m}{2}A^2\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 e^{-\mu t}\sin^2\frac{\omega}{2}t \qquad (33.9)$$

となる．ここで $\mu \ll \omega$ という仮定のために μ に比例する項は無視した．

(33.9) の第1項は静止エネルギー，第2項は質点の振動にもとづく運動のエネルギーである．これは ω^2 に比例する．質点の速さ v は，$v = A\omega/2$ であるから第1項に比べて第2項は $(v/c)^2$ の程度の小さい項である．しかしこれを考慮にいれる以上は，これと同程度の大きさをもつ質点のポテンシャル・エネルギーも考えにいれねばならない．いま，質点に働くバネの弾性係数を k とすればポテンシャル・エネルギーは

$$\sum_{a=1}^{2}\frac{k}{2}(\vec{\xi}_a)^2, \qquad k = m\left(\frac{\omega}{2}\right)^2$$

である．あるいは

$$2\cdot\frac{m}{2}\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 A^2 e^{-\mu t}\cos^2\frac{\omega}{2}t. \qquad (33.10)$$

これを (33.9) に加えると，時刻 t における質点系のもつ全エネルギー $W(t)$ は

$$W(t) = 2mc^2 + mA^2\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 e^{-\mu t} \qquad (33.11)$$

となる．したがって，(33.8) の左辺は

$$-\{W(t+T) - W(t)\} = \mu T m A^2\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 e^{-\mu t} \qquad (33.12)$$

となる．μ の2次以上を無視すると，単位時間中に質点系が失うエネルギーは ($e^{-\mu t}$ を1とおいてもかまわないから)

$$\mu m A^2\frac{\omega^2}{4} = \mu I\frac{\omega^2}{4} \qquad (33.13)$$

となる．I は慣性能率である．

つぎに (33.8) の右辺を計算しよう．(28.34 a) で与えられる $\boldsymbol{t}^{\nu}{}_{\mu}$ は

$$\boldsymbol{t}^{\nu}{}_{\mu} = -\frac{1}{2\kappa}[\Gamma^{\nu}{}_{\rho\sigma}\partial_\mu(\sqrt{-g}\,g^{\rho\sigma}) - \Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\rho}\partial_\mu(\sqrt{-g}\,g^{\nu\rho})] - \frac{1}{2\kappa}\delta^{\nu}{}_{\mu}\boldsymbol{G} \qquad (33.14)$$

である．これを $\sqrt{\kappa}$ の最低次の近似でかくと

$$t^{\nu}{}_{\mu}=\frac{1}{8}\Big[4\varphi^{\nu}{}_{\rho,\sigma}\varphi^{\rho\sigma}{}_{,\mu}-2\varphi^{\rho\sigma,\nu}\varphi_{\rho\sigma,\mu}+\varphi_{,\mu}\varphi_{,}{}^{\nu}$$

$$+\delta^{\nu}{}_{\mu}\Big(\varphi^{\alpha\beta,\lambda}\varphi_{\alpha\beta,\lambda}-\frac{1}{2}\varphi_{,\rho}\varphi_{,}{}^{\rho}-2\varphi^{\alpha\beta,\lambda}\varphi_{\alpha\lambda,\beta}\Big)\Big]. \qquad (33.15)$$

そこで $k=1, 2, 3$ に対して

$$t^{k}{}_{0}=\frac{1}{8}[4\varphi_{k\rho,\sigma}\varphi^{\rho\sigma}{}_{,0}-2\varphi^{\rho\sigma}{}_{,k}\varphi_{\rho\sigma,0}+\varphi_{,k}\varphi_{,0}]. \qquad (33.16)$$

ところで重力波（33.7）は，$1/r$ の程度の大きさの量に着目すれば

$$\partial_{\mu}\varphi^{\mu\nu}=0 \qquad (32.3)$$

を確かに満足している．すなわち $O(1/r)$ の量だけに着目すれば

$$\varphi_{33,3}=\varphi_{03,0}, \qquad \varphi_{03,3}=\varphi_{00,0} \qquad (33.17)$$

が成り立つ． ところで（33.16）の右辺第1項が0でない値をもつのは $k=3$ の場合だけである． しかし， それも，（33.17）を使うと結局0となる． したがって

$$t^{k}{}_{0}=\frac{1}{8}[\varphi_{,k}\varphi_{,0}-2\varphi^{\rho\sigma}{}_{,k}\varphi_{\rho\sigma,0}] \qquad (33.16)'$$

となる．

さて， 積分域の半径 r を十分に十きくとれば，（33.8）の右辺の積分に効くものは $t^{k}{}_{0}$ の中で $O(1/r^2)$ の量である． そこで（33.16)′に（33.7）を代入して $O(1/r^2)$ の量を計算すると

$$t^{k}{}_{0}\approx\frac{\kappa I^2\omega^6}{8c^2(4\pi)^2}(1-\cos^2\theta)^2\frac{x^k}{r^3}\sin^2\omega\Big(t-\frac{r}{c}\Big) \qquad (33.16)''$$

となる．これを用いると

$$c\int_{t}^{t+T}dt\Big(\int_{S}t^{k}{}_{0}\,d\sigma_{k}\Big)=\frac{2\pi GI^2\omega^5}{15c^5} \qquad (33.18)$$

となる． あるいは $T=2\pi/\omega$ で割ると， 単位時間中に無限の遠方に重力波により持ち去られるエネルギーは

$$\frac{G\omega^6I^2}{15c^5} \qquad (33.18)'$$

である． これと（33.13）を比べると， 未定のままになっていた減衰係数 μ は

$$\mu = \frac{4G\omega^4}{15c^5}I \tag{33.19}$$

となる.

なお (33.16)″ をみると，座標原点で z-軸に沿って振動している調和振動子から放射される重力波のエネルギーの流れの強さは $\sin^4\theta$(θ は波の進行方向と z-軸の間の角) に比例する．したがって x, y-面に沿った放射が一番強い.

§34. 重力波の吸収

永久重力場の存在を確かめるのには，既に §17 で述べたように，互いに近接した 2 個の質点の間の相対的へだたり，つまり geodesic deviation の振舞を調べなければならない．重力波の検波にも一対の質点を用いる必要がある.

そこで，2 個の質点 1, 2 の座標を 2 個のパラメーター τ, u を用いてそれぞれ

$$x^\mu(\tau, u), \qquad x^\mu(\tau, u+\Delta u)$$

で表わす．τ は各質点の固有時を示し，u は質点を識別するパラメーターである．また両者の静止質量はともに m とする．したがって，運動方程式はそれぞれ

$$\left.\begin{aligned} m\frac{D^2x^\mu(\tau, u)}{(D\tau)^2} &= F^\mu(\tau, u), \\ m\frac{D^2x^\mu(\tau, u+\Delta u)}{(D\tau)^2} &= F^\mu(\tau, u+\Delta u) \end{aligned}\right\} \tag{34.1}$$

となる．ここで F^μ は質点に働く重力以外の 4 元力を表わす．絶対微分 D の意味はつぎのとおりである．いま，任意のベクトル $V^\mu(x)$ に対して，τ, および u に関する絶対微分とは

$$\frac{DV^\mu}{D\tau} = \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\nabla_\nu V^\mu, \qquad \frac{DV^\mu}{Du} = \frac{\partial x^\nu}{\partial u}\nabla_\nu V^\mu \tag{34.2}$$

のことである.

さて，質点 2 と 1 の間の geodesic deviation を

$$\eta^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial u}\Delta u$$

とおけば，(34.1) を u について絶対微分をとることにより

$$\frac{D^2\eta^\mu}{D\tau^2} + R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\eta^\rho\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tau} = \frac{1}{m}\frac{DF^\mu}{Du}\Delta u \stackrel{d}{\equiv} f^\mu \tag{34.3}$$

となる．これが η^μ に対する方程式である．もし，永久重力場も存在せず，外力もなければ

$$\frac{D^2\eta^\mu}{D\tau^2} = 0$$

となる．この解を ξ^μ とする．いま，ξ^μ は既知の量とし

$$\eta^\mu = \xi^\mu + \zeta^\mu \tag{34.4}$$

とおく．これを（34.3）に代入すれば

$$\frac{D^2\zeta^\mu}{D\tau^2} - f^\mu = -R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}(\xi^\rho + \zeta^\rho)\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tau} \tag{34.3$'$}$$

となる．

ここで，質点系の重心は座標系の原点に大体静止しているものとする．したがって質点の速さは c に比べて十分に小さいと考えられる．なぜなら両質点とも重心からごくわずかしか離れておらず，それらが重力波の影響をうけて振動しても，振動数がむやみに大きい場合を除いては，振幅が小さいから，速さは c と比肩できるほどに大きくはなりえないであろう．したがって

$$d\tau \approx dt, \qquad \frac{\partial x^\mu}{\partial\tau} = \begin{cases} c, & \mu = 0 \\ 0, & \mu = 1, 2, 3 \end{cases}$$

としてよい．

ここで“弱い重力場”の仮定を採用する．すなわち曲率テンソル $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ は $\sqrt{\kappa}$ の程度の量とする．また，入射重力波を検波できるためには，両質点に作用している重力以外の力の差 f^μ も $\sqrt{\kappa}$ の程度の小さいものでなければならない．したがって（34.3)$'$ から ζ^μ は $\sqrt{\kappa}$ の程度の小さい量と考えられる．そこで（34.3)$'$ の右辺の ζ^ρ は無視できるから，η^μ をきめる方程式は，結局

$$\frac{d^2\zeta^\mu}{dt^2} - f^\mu = -c^2R^\mu{}_{0\rho0}\xi^\rho \tag{34.3$''$}$$

となる．

ここで f^μ として弾性力と摩擦力の和を考えよう．すなわち

$$-f^{\mu} \overset{d}{\equiv} (\omega_0)^2 \zeta^{\mu} + R \frac{d\zeta^{\mu}}{dt} \qquad (34.5)$$

とおく．この場合には，ζ をきめる方程式は

$$\frac{d^2\zeta^{\mu}}{dt^2} + (\omega_0)^2 \zeta^{\mu} + R \frac{d\zeta^{\mu}}{dt} = -c^2 R^{\mu}{}_{0\rho 0} \xi^{\rho}. \qquad (34.6)$$

(34.6) は，$-m(\omega_0)^2\zeta^{\mu}$ という力のバネで結ばれた2個の質点系に重力波が $-mc^2R^{\mu}{}_{0\rho 0}\xi^{\rho}$ という力で強制振動を起こすことを表わしている．ただしこの系には $-mRd\zeta^{\mu}/dt$ という摩擦力も働いている．

ここで扱っている近似では，ξ^{μ} は

$$\frac{d^2\xi^{\mu}}{dt^2} = 0$$

となる．したがって今後は $\xi^{\mu} =$ 一定 とする．つまり2個の質点間の間隔は一定である．これに外から重力波が作用して小さな振幅 ζ^{μ} をもつ強制振動が起きるために，2点間の間隔はわずかに変化する．

さて，弱い重力場の場合には

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \frac{\sqrt{\kappa}}{2}(h^{\alpha}{}_{\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,}{}^{\alpha}{}_{\nu} - h^{\alpha}{}_{\mu,\beta\nu} - h_{\beta\nu,}{}^{\alpha}{}_{\mu}),$$

特に

$$R^{\mu}{}_{0\rho 0} = \frac{\sqrt{\kappa}}{2}(h^{\mu}{}_{0,0\rho} + h_{0\rho,}{}^{\mu}{}_{0} - h^{\mu}{}_{\rho,00} - h_{00,}{}^{\mu}{}_{\rho}) \qquad (34.7)$$

である．いま，角振動数 ω $(= ck)$ の重力波が z-軸の正の方向に向かって入射するとしよう．重力場のゲージ変換を適当に行えば，その0でない成分は

$$h_{11} = -h_{22}, \qquad h_{12} = h_{21}$$

だけとなる．いま

$$h_{\mu\nu}(x) = a_{\mu\nu} \cos k(z - x^0)$$

とおく．そこで (34.7) から

$$\left.\begin{aligned} &R^{\mu}{}_{0\rho 0}(x)\cdot\xi^{\rho} = A^{\mu} \cos k(z - x^0), \\ &A^k \overset{d}{\equiv} \frac{\omega^2}{2c^2}\sqrt{\kappa}(a_{k1}\xi^1 + a_{k2}\xi^2) \qquad (k = 1, 2) \\ &A^0 = A^3 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (34.8)$$

となる.

(34.8) を (34.6) の右辺に代入するときは (34.8) の z を 0 とおけばよい. なぜならば, (34.6) の右辺の曲率テンソルには, 質点 1, 2 の重心における値, つまり座標原点における値を用いなければならないからである. いま, (34.6) の特解 (強制振動を示す解) を

$$\zeta^\mu(t) = a^\mu \cos \omega t + b^\mu \sin \omega t \tag{34.9}$$

とおくと, (34.6) から

$$\left.\begin{aligned} a^\mu &= \frac{(\omega^2 - \omega_0{}^2)c^2 A^\mu}{(\omega^2 - \omega_0{}^2)^2 + (\omega R)^2}, \\ b^\mu &= \frac{-\omega R c^2 A^\mu}{(\omega^2 - \omega_0{}^2)^2 + (\omega R)^2} \end{aligned}\right\} \qquad (34.9)'$$

となる.

(34.8), (34.9)′ をみるとつぎのことがわかる. 入射重力波が z-軸の方向に進行する場合, これを受ける振動子 $\vec{\xi}$ が z-軸に平行ならば, A^μ はすべて 0 となり, その結果, 強制振動は起こらない. これに対して $\vec{\xi}$ が x, y-面内にあれば (たとえば, $\xi^1 = \xi \neq 0,\ \xi^2 = \xi^3 = 0$),

$$A^k = \frac{\omega^2 \sqrt{\kappa}}{2c^2} a_{k1} \xi \qquad (k = 1, 2). \qquad (34.8)'$$

したがって (34.9) で表わされる強制振動が起きる.

さて, 振動子は摩擦があるので, 重力波からもらったエネルギーは, そっくり摩擦によって失われる. その結果 微小振動の振幅は大きく成長もせず, さりとて減衰もしないで (34.9)′ という一定の大きさを持ちつづける. そこで, 摩擦により失われるエネルギーを計算してみよう. まず, 摩擦力は

$$-mR \frac{d\vec{\zeta}}{dt}$$

である. これが振動の 1 周期 $T = 2\pi/\omega$ の間にする仕事は

$$W = \int_0^T mR \frac{d\vec{\zeta}}{dt} \cdot \frac{d\vec{\zeta}}{dt} dt.$$

これに (34.9), (34.9)′ および (34.8)′ を代入すると, 単位時間に摩擦によ

り失われるエネルギー $Q = W/T$ は

$$Q = \frac{mR\omega^2}{2}\{(\vec{a})^2 + (\vec{b})^2\}$$

$$= \frac{mR\omega^6\kappa(\xi)^2}{8\{(\omega^2 - \omega_0{}^2)^2 + (\omega R)^2\}}\{(a_{11})^2 + (a_{12})^2\}. \qquad (34.10)$$

この Q は，一方では単位時間中に振動子により吸収される重力波のエネルギーとも解釈できる．事実重力波による力

$$-mc^2R^{\kappa}{}_{0\rho 0}\xi^{\rho} \qquad (k = 1, 2, 3)$$

が単位時間中に振動子に与える仕事を計算すればまさに (34.10) に一致する．(34.10)からわかるように，Q が最大となるのは $\omega \approx \omega_0$ のときである．これは振動子が入射重力波に共鳴する場合である．$\omega = \omega_0$ としたときの Q を $Q_{\max}$ とかけば

$$Q_{\max} = \frac{\kappa\omega_0{}^4 m(\xi)^2}{8R}\{(a_{11})^2 + (a_{12})^2\}$$

となる．振動子の重心に関する慣性能率は

$$I = 2 \times m\left(\frac{\xi}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}m(\xi)^2$$

であるから

$$Q_{\max} = \frac{\kappa\omega_0{}^4 I}{4R}\{(a_{11})^2 + (a_{12})^2\} \qquad (34.11)$$

となる．

ところで振動子に入射する平面重力波が単位時間中にその進行方向に垂直な平面（つまり x, y-平面）の単位面積を通して持ちこむエネルギーを計算してみよう．これは

$$\frac{1}{T}\int_0^T c\boldsymbol{t}^3{}_0\, dt$$

で与えられる．この $\boldsymbol{t}^3{}_0$ は座標原点における値を示す．弱い重力場の場合には，$\boldsymbol{t}^3{}_0$ は (33.16) から

$$\boldsymbol{t}^3{}_0 = \frac{1}{8}[4\varphi_{3\rho,\sigma}\varphi^{\rho\sigma}{}_{,0} - 2\varphi^{\rho\sigma}{}_{,3}\varphi_{\rho\sigma,0} + \varphi_{,3}\varphi_{,0}]$$

となる．しかしここで扱っている重力波は

$$h=\varphi=0, \qquad \varphi_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}$$

である．また0でない成分は $\varphi_{11}(=-\varphi_{22})$ と $\varphi_{12}(=\varphi_{21})$ だけであるから，上の $\boldsymbol{t}^3{}_0$ の右辺の第2項だけが0でない．すなわち

$$\boldsymbol{t}^3{}_0(\vec{x}=0)=\frac{\omega^2}{2c^2}\{(a_{11})^2+(a_{12})^2\}\sin^2\omega t.$$

したがって

$$\frac{1}{T}\int_0^T c\boldsymbol{t}^3{}_0(\vec{x}=0,\,t)dt=\frac{\omega^2}{4c}\{(a_{11})^2+(a_{12})^2\} \qquad (34.12)$$

となる．つまり単位時間中に x, y－面の単位面積を通って（34.12）だけのエネルギーが入射し，そのうち（34.10）だけが振動子に吸収される．そこで（34.10）を（34.12）で割ると

$$\sigma=\frac{\kappa Rc\omega^4 I}{\{(\omega^2-\omega_0{}^2)^2+(\omega R)^2\}}=\frac{8\pi GR\omega^4 I}{c^3\{(\omega^2-\omega_0{}^2)^2+(\omega R)^2\}}.$$

これが振動数 ω の重力波の，振動子による吸収断面積である．σ が最大となるのは $\omega\approx\omega_0$ のときである．$\omega=\omega_0$ とおけば

$$\sigma_{\max}=\frac{8\pi G\omega_0{}^2}{Rc^3}I$$

となる．これらの計算結果をもとに他の天体から地球に入射する重力波の検波を最初に試みたのは米国メリーランド大学の J. Weber である．その後，世界の各地で同様の実験がいろいろの人により試みられた．しかし何分にも電波と異なり，重力波の場合には，その源がどこにあるかもよくわからず，さらに入射波の強度や，吸収断面積が小さいので，まだ決定的な結論は残念ながら求められていない．

§35. 重力波に対するまとめ

前節までは，弱い重力場の場合に限って重力波の問題を議論してきた．このような近似法は**線形近似**とよばれる．これは $g_{\mu\nu}$ を小さなパラメーター $\sqrt{\kappa}$ のべき（冪）級数に展開したときの $\sqrt{\kappa}$ の1次の項だけに着目した近似法で

ある．この近以の範囲で問題を扱うとき，場合によっては矛盾点にも出会ったが（たとえば $\partial_\mu T^{\mu\nu}$ が厳密にいえば 0 とならないという点），それらはすべて $\sqrt{\kappa}$ の高次の量であるから無視してかまわないということで，問題をどうにかきりぬけてきた．したがって線形近似により導かれた結果をどこまで信用してよいか問題である．Einstein の理論は §17 や §22 で述べたように，線形近似では Newton の理論と一致する．前者が Newton 理論と大きく違い，その特徴を発揮するのはむしろ $\sqrt{\kappa}$ のべき級数に展開しにくいような場合であろう．たとえば，$\det(g_{\mu\nu})$ がほとんど 0 に近くなるような場合である．後にでてくる Schwarzschild の解を例にとれば，$g_{00}\approx 0$，$g_{11}\approx\infty$ となるような場合もそのひとつである．したがって線形近似を使うときは Einstein の理論のすぐれた特徴がほとんど消えてしまうといっても過言ではない．線形近似は Einstein の理論の教えることを見通すのにひとつの有力な手段ではあるが，それにたよりすぎることは危険である．

ここで Trautman による批判を紹介しよう．その前に Einstein の方程式

$$G_{\mu\nu}=\kappa T_{\mu\nu} \tag{35.1}$$

は，つぎのような二通りの読みかたができることを注意しておこう．ひとつは，まず，右辺の $T_{\mu\nu}$ が既知量のとき，それのうみだす重力場 $g_{\mu\nu}$ は左辺により与えられるという解釈である．つまり右から左に読む方法である．これとは逆に，いま $g_{\mu\nu}$ が与えられているとする．それを使えばまず $G_{\mu\nu}$ が計算できる．それを κ で割れば，出発点の $g_{\mu\nu}$ をうみだした源の物質の $T_{\mu\nu}$ が求まる．これは (35.1) を左から右に読む方法である．

さて，源の物質について与えられた（$\sqrt{\kappa}$ の 0 次の）${}_0T_{\mu\nu}$ をもとに線形近似を用いて ${}_1g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+\sqrt{\kappa}\,h_{\mu\nu}$ が求まったとする．$h_{\mu\nu}$ は $\sqrt{\kappa}$ に比例するから ${}_1g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+\kappa h'_{\mu\nu}$ とかく方が便利である.* h' は κ に無関係な量である．いま，近似解 ${}_1g_{\mu\nu}$ を $G_{\mu\nu}$ に代入すると，上に述べた (35.1) の左から右への読み方に従って ${}_1g_{\mu\nu}$ の源である $T_{\mu\nu}$ が求まる．これを κ のべき級数に展開して

* $h_{\mu\nu}=\sqrt{\kappa}\,h'_{\mu\nu}$ とした．

$$T_{\mu\nu}(x,\ \kappa) = {}_0T_{\mu\nu}(x) + \kappa\cdot{}_1T_{\mu\nu}(x) + \kappa^2\cdot{}_2T_{\mu\nu}(x) + \cdots \qquad (35.2)$$

とかこう．この最初の項ははじめに与えられた ${}_0T_{\mu\nu}$ である．ところで，恒等式

$$\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{G}^{\lambda}{}_{\rho} + \boldsymbol{t}^{\lambda}{}_{\rho} \equiv -\frac{1}{\kappa}\partial_\sigma{}^{[\lambda}{}_{\rho}\boldsymbol{D}^{\sigma]} + c\,\partial_\sigma({}^0\boldsymbol{C}^{[\sigma,\lambda]}{}_{\rho}) - c\,\partial_\sigma\partial_\tau\boldsymbol{F}^{\tau,\lambda\rho}{}_{\rho} \qquad (29.1)$$

に上の近似解 ${}_1g_{\mu\nu}$ を代入する． また， 左辺の第1項を（35.2）の形にかく．$\boldsymbol{t}^{\lambda}{}_{\rho}$ も κ のべき級数に展開する．そのうえで両辺の κ の1次の項を比較すると

$${}_1\boldsymbol{T}^{\lambda}{}_{\rho}(x) + {}_1\boldsymbol{t}^{\lambda}{}_{\rho}(x) \equiv (29.1)\ \text{の右辺の}\ \kappa^1\ \text{の項}$$

となる．特に $\lambda = k(=1,\ 2,\ 3)$，$\rho = 0$ とすると左辺第2項は線形近似で求めたエネルギーの流れの密度の第 k 成分を示す．また，左辺第1項は ${}_1g_{\mu\nu}$ の源となった物質のエネルギーの流れの第 k 成分のうちで κ^1 に比例する項である．そこでこれらの和を原点を中心とする半径 r の大きな球面の上で表面積分すれば，左辺はこの球面から逃げ出す全エネルギーの中で κ の1次の量を示す．ところがこの右辺を表面積分すると， 時間微分を含まない項はすべて Stokes の定理により0となる．つぎに重力波の振動数の1周期にわたる時間平均をとれば，残っていた時間微分を含む項もすべて周期性のために0となる．結局1周期たったのちには，少くとも線形近似の範囲では原点の近くに局在している物質系から重力波により持ち去られたエネルギーは，逆に外から流れこむ ${}_1\boldsymbol{T}^{k}{}_0$ という“物質”のエネルギーにより相殺されて中心の物質系のエネルギーには変化がないことになる．これが線形近似に対する Trautman の批判である．

彼はこの事情を改善しようとして κ^2 の項まで近似をたかめたが， その結果は発散の困難にぶつかった．

上述のような難点のおきた原因はもちろん近似法が不適当であることにもよるが，重力波放射の有無の判断が電磁波の場合と本質的に違って，非常にむずかしいためでもある．電磁波のときは，その源である荷電体をとりかこむ大きな閉曲面から外にでていくエネルギーの有無により電磁波の存否を確認できた．ところが重力場の場合にはそのエネルギーやエネルギーの流れがテンソルではないために，エネルギーの流出を重力波の存否の判断に使うという方法は

一般座標変換に対して不変な判断法とはいえない．この方法にたよるためには重力波の源である物質系が孤立系である必要がある．そのような場合には§29で述べたように，重力場のエネルギーについて意味をもたせることができるからである．

孤立物質系の場合はその中心（これを仮に座標原点にとる）からの空間的距離が十分に大きければ

$$g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$$

となるような座標系が存在する（これは孤立系の定義にほかならない）．このような座標系を仮に漸近的 Lorentz 系とよぶことにしよう．いまそのような座標系において $r=\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}$ とおけば，重力波の問題に対する第2の近似法として，$g_{\mu\nu}$ やその他の量をすべて r の逆べきの級数に展開するという方法が考えられる．この方法で手本となるのはひとつは電磁波，もうひとつは本章で述べた線形近似による結論である．

電磁波の場合，電波の波長を λ とするとき $r \gg \lambda$ の場所では，外に向かって出て行く波は

$$A^\mu(x) \approx \frac{a^\mu(\theta,\varphi)}{r}\sin\frac{2\pi}{\lambda}(r-x^0) \tag{35.3}$$

という形にかき表わすことができる．ここで $A \approx B$ とは，$O(r^{-2})$ の量を無視すれば，A と B が等しいことを意味する．いま

$$u(x) \overset{d}{\equiv} r - x^0, \qquad k_\nu \overset{d}{\equiv} \frac{\partial u}{\partial x^\nu} \tag{35.4}$$

とおけば，

$$A^\mu{}_{,\nu} \approx k_\nu \cdot B^\mu, \qquad B^\mu \overset{d}{\equiv} \frac{2\pi}{\lambda}\frac{a^\mu}{r}\cos\frac{2\pi}{\lambda}u$$

となる．B^μ は A^μ と同様に $O(r^{-1})$ の量である．さらに

$$A^\mu{}_{,\nu\rho} \approx k_\nu k_\rho C^\mu, \qquad C^\mu \overset{d}{\equiv} -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\frac{a^\mu}{r}\sin\frac{2\pi}{\lambda}u$$

となる．C^μ も $O(r^{-1})$ の量である．なお電磁場の場合には k_ν の定義から

$$k_0 = -1, \qquad k_i = \frac{x^i}{r} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

したがって

$$\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0 \tag{35.5}$$

となる．

$f_{\mu\nu}$ も波動域 $r \gg \lambda$ では

$$f_{\mu\nu} \approx k_\mu B_\nu - k_\nu B_\mu \stackrel{d}{\equiv} 2 k_{[\mu} B_{\nu]} \tag{35.6}$$

となる．また，Maxwell の方程式は

$$f_{\mu\nu} k^\nu \approx 0 \tag{35.7}$$

となる．(35.6) と同等な意味をもつ関係式

$$\partial_\lambda f_{\mu\nu} + \partial_\mu f_{\nu\lambda} + \partial_\nu f_{\lambda\mu} = 0$$

は，波動域では

$$k_\lambda f_{\mu\nu} + k_\mu f_{\nu\lambda} + k_\nu f_{\lambda\mu} \approx 0 \tag{35.6$'$}$$

となる．あるいは (10.17) によりデュアル・テンソル密度 $^*\boldsymbol{f}^{\mu\nu}$ を

$$^*\boldsymbol{f}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\rho\sigma} \tag{10.17}$$

と定義すれば (35.6)$'$ は

$$^*\boldsymbol{f}_{\mu\nu} k^\nu \approx 0 \tag{35.6$''$}$$

と同じである．そこで波動域では，電磁波は (35.7), (35.6)$''$ を同時に満たすから

$$(f_{\mu\nu} + i^*\boldsymbol{f}_{\mu\nu}) k^\nu \approx 0 \tag{35.8}$$

となる．

これとよく似たことが重力場でも成り立つ．いま r の十分大きいところで

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + O\left(\frac{1}{r}\right) \tag{35.9}$$

とする．この微分に関してつぎのような関係が成り立つものとする：

$$g_{\mu\nu,\lambda} \approx B_{\mu\nu} k_\lambda, \qquad B_{\mu\nu} = O(r^{-1}). \tag{35.10}$$

ここで $k_\lambda(x)$ は $O(r^0)$ の量とする． この仮定は (35.9) の第2項が (35.3) のような波動的振舞をもつという仮定と同等 (あるいはそれより広い) であ

る．$g_{\mu\nu}$ の2階微分についても

$$g_{\mu\nu,\lambda\rho} \approx H_{\mu\nu}k_\lambda k_\rho, \qquad H_{\mu\nu} = O(r^{-1}) \tag{35.11}$$

とする．ここではまだ k_λ がヌル・ベクトルかどうかはわからない．なお，(35.9)，(35.10)，(35.11) が成り立つような場合にこれを重力波と呼ぶことにし，このような関係の成り立つ領域を重力場の波動域とよぶことにする．

(35.11) を使うと曲率テンソルは

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} \approx 2k_{[\mu}H_{\nu][\rho}k_{\sigma]} \tag{35.12}$$

となる．また，真空中における Einstein の方程式 $R_{\mu\nu}=0$ は

$$k_\mu k_\nu H^\lambda{}_\lambda + (k_\lambda k^\lambda)H_{\mu\nu} - k_\mu k^\lambda H_{\lambda\nu} - k_\nu k^\lambda H_{\lambda\mu} \approx 0 \tag{35.13}$$

となる．ここで添字の上げ下ろしは $\eta^{\mu\nu}$, $\eta_{\mu\nu}$ による．この両辺に $k_\rho k_\sigma$ を掛け，ρ と μ, ν と σ について反対称化すると，k_μ, あるいは k_ν を因子にもつ項はすべて0となるから

$$(k_\lambda k^\lambda)k_{[\rho}H_{\mu][\nu}k_{\sigma]} \approx 0,$$

あるいは (35.12) を使うと

$$(k_\lambda k^\lambda)R_{\rho\mu\nu\sigma} \approx 0$$

となる．重力波が存在する以上，曲率テンソルは0ではない．したがって k_λ は予想したようにヌル・ベクトルでなければならない：

$$k_\lambda k^\lambda \approx 0. \tag{35.14}$$

(35.14) を使うと (35.13) の第2項は消える．そこで (35.13) に k_τ を掛け，τ と ν について反対称化すると，k_ν を因子にもつ項は0となるから

$$-k_\mu\{k^\lambda H_{\lambda\nu}k_\tau - k^\lambda H_{\lambda\tau}k_\nu\} \approx 0,$$

すなわち

$$\frac{H_{\nu\lambda}k^\lambda}{k_\nu} \approx \frac{H_{\tau\lambda}k^\lambda}{k_\tau}$$

となる（ν, τ について和をとるな）．したがって

$$H_{\nu\lambda}k^\lambda \approx k_\nu f \tag{35.15}$$

となる．これを再び (35.13) に代入すると

$$k_\mu k_\nu(H^\lambda{}_\lambda - 2f) \approx 0.$$

したがって，Einstein の方程式は波動域では，(35.15) から

$$H_{\nu\lambda}k^{\lambda}-\frac{1}{2}H^{\lambda}{}_{\lambda}k_{\nu}\approx 0 \qquad (35.15)'$$

となる．なお (35.15)′，(35.14)，(35.12) を使うと

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}k^{\sigma}\approx 0 \qquad (35.16)$$

となる．

Bianchi の恒等式は波動域では

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}k_{\lambda}+R_{\mu\nu\sigma\lambda}k_{\rho}+R_{\mu\nu\lambda\rho}k_{\sigma}\approx 0. \qquad (35.17)$$

これは (35.12) と同等である．電磁場の場合に (35.6)′ から (35.6) を導くことができたのと同様に，(35.17) から (35.12) が導かれるからである．もし

$$^{*}R^{\mu\nu\rho\sigma}\overset{d}{\equiv}\frac{1}{2\sqrt{-g}}\boldsymbol{E}^{\rho\sigma\lambda\tau}R^{\mu\nu}{}_{\lambda\tau}$$

を使えば，(35.17) は

$$^{*}R^{\mu\nu\rho\sigma}k_{\sigma}\approx 0. \qquad (35.17)'$$

とかくこともできる．そこで重力波が存在するならば，曲率テンソルは，その波動域にて (35.16) および (35.17)′ を満足しなければならない．両者をひとまとめにすると，つぎのようになる．すなわち，波動域では適当なヌル・ベクトルの場 $k_{\sigma}(x)$ が存在し，それに対して

$$(R^{\mu\nu\rho\sigma}+i^{*}R^{\mu\nu\rho\sigma})k_{\sigma}\approx 0 \qquad (35.18)$$

が成立しなければならない．これは重力波が存在するために必要な，曲率テンソルの満足すべき条件である．

物質の急激な変動により引き起こされた重力場の擾乱は物質を源として八方に広がるであろう．その先端（これを波面と呼ぶことにする）では，擾乱がまだ到達していない波面の外側と，既に擾乱の起きている手前側では波面をはさんで，重力やその勾配に不連続的差が存在すると考えられる．そこでこのような波面を表わす方程式を

$$u(x^{0},x^{1},x^{2},x^{3})=0$$

とする．この法線を示すベクトルを $k_{\mu}\overset{d}{\equiv}\partial_{\mu}u$ とするとき，波面をはさんだ両側における曲率テンソルの値の差を $\varDelta R_{\mu\nu\rho\sigma}$ とすれば，(35.18) によく似た

$$(\Delta R^{\mu\nu\rho\sigma} + \Delta^* R^{\mu\nu\rho\sigma})k_\sigma = 0 \tag{35.19}$$

という関係式が u の上で成り立つ. $u=0$ を重力波の波面と考えれば, (35.19) は $\Delta R_{\mu\nu\rho\sigma}$ に対する重要な制限を意味する. なお k_μ がヌル・ベクトルであることも証明できる. これについては§49 で再び述べる.

(35.18), (35.19) は曲率テンソルや, その変化 ΔR に対する代数的条件である. これらをみると $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ の代数的性質の研究が重力波の存在の判断法として役立つことが予想される. この問題も後に§53 でくわしく述べる. ここでは結果だけを述べておくにとどめる.

物質が存在しない領域における Einstein の方程式

$$R_{\mu\nu} = 0$$

を満足する時空は Einstein 空間とよばれる. この空間の曲率テンソルの代数的性質を調べ, それにより空間を分類したのは Petrov である. 彼によると代数的に最も一般な空間を I, このほかに, II, D, III, N という記号で表わされる4個のタイプがある. これら5個のうちでNが特に特別な性格をもつものである. 空間がNタイプであるための条件は, それの曲率テンソルが (35.18) と全く同じ関係を満足することである. したがって重力波が存在するとき, その空間は波動域では, N型であることになる. また, 曲率の不連続値 ΔR も N型と同じ条件を満足する. また本章で述べた, 線形近似を使って導いた平面重力波は (35.18) を厳密に満たす. つまり $=0$ が成立する. したがってこれもN型である.

Sachs はパラメーター κ については線形近似を用い, 座標原点にある物質のうみだす重力場の曲率テンソルを, 多極子放射による部分波の和に展開した. それによると r^{-1} の各べきごとに空間のタイプが異なることがわかった. すなわち

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}(x) = N_{\mu\nu\rho\sigma}\cdot r^{-1} + III_{\mu\nu\rho\sigma}\cdot r^{-2} + II_{\mu\nu\rho\sigma}\cdot r^{-3}$$
$$+ I_{\mu\nu\rho\sigma}\cdot r^{-4} + I'_{\mu\nu\rho\sigma}\cdot r^{-5} + O(r^{-6}). \tag{35.20}$$

ここで r^{-1} の各べきの係数に使われた文字は空間のタイプを示す. たとえば第1項はN型の空間を示す. またI型は r^{-4} および r^{-5} の振舞をする. Sachs

の研究によると r^{-1}, r^{-2} の項が存在するときは，源の物質のエネルギーが時間の経つにつれて減少することが示された.

このほかにも重力波に関して興味深いことが数多くあるが，以上で本章を終る.

第7章　Einstein 方程式の厳密解

§ 36.　Schwarzschild の外部解

Einstein の方程式は求めるべき未知関数が 10 個あり，さらに非線形方程式であるから，電磁場の Maxwell の方程式と異なり，これの厳密解を求めることは非常にむずかしい．そこで Einstein 自身は自分の提唱した理論を検討するために逐次近似法で方程式の解を求め，それを用いて，いろいろと興味ある結論を引きだした．

Einstein の方程式を静的，球対称という条件のもとにはじめて厳密に解いたのは Schwarzschild である．彼の解は比較的簡単に求まるにもかかわらず，多数の物理的にきわめて重要な，興味ある結果がそれから導かれた．彼の解につづいて Reissner や Weyl，その他の人々により，他の場合の厳密解も与えられた．しかし本書では紙面の都合上，物理的に見て重要な解だけを特に二，三紹介する．これらのうちまず述べねばならないものは Schwarzschild の解である．ここでは以下のように Weyl の考案に従って変分法を用いて解くことにする．これが一番簡単な方法と思う．

空間座標の原点に静止している質量 M の球対称の孤立した物体のまわりの重力場を求めよう．源の物体から十分に離れたところでは（漸近的 Lorentz 系）

$$g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu} + O(r^{-1}) \tag{36.1}$$

となるものとする．ここで

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}\,.$$

また $x^0 = ct$ は (36.1) のために，無限遠では特殊相対論的な，つまり観測という立場からみても有意義な時間変数である．

いま，4次元不変距離 ds^2 を

$$ds^2 = -A(r)(dx^0)^2 + B(r)\sum_{k=1}^{3}(dx^k)^2 + C(r)dx^0\sum_{k=1}^{3}x^k dx^k$$

$$+ D(r)(\sum_{k=1}^{3} x^k dx^k)^2$$

とおくことができる．これは球対称という条件を満たす最も一般な形である．ここで A, B は正の，r だけの関数である．しかし時間の反転に対しても不変とすれば C は0となる．さらに以下に説明するように B は必ず1とおくことができる．

いま x^1, x^2, x^3 の代りに球座標 (r, θ, φ) を使うと，上の $B(r)$ の項は

$$B(r)(dr)^2 + B(r)r^2\{(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2\}$$

となる．いま

$$r' = r\sqrt{B(r)}\ ,$$

あるいは逆にこれを r について解いたものを

$$r = f(r')$$

とおけば

$$\begin{aligned} ds^2 = &- A\{f(r')\}(dx^0)^2 + (dr')^2 + (r')^2\{(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2\} \\ &+ \frac{1}{(r')^2}\left[B\{f(r')\}\left\{\frac{df(r')}{dr'}\right\}^2\right. \\ &\left.- 1 + D\{f(r')\}\left\{f\frac{df}{dr'}\right\}^2\right](r'dr')^2. \end{aligned} \tag{36.2}$$

ここで

$$x^{1\prime} = r'\sin\theta\cdot\cos\varphi, \qquad x^{2\prime} = r'\sin\theta\cdot\sin\varphi, \qquad x^{3\prime} = r'\cos\theta$$

とおけば

$$ds^2 = - A\{f(r')\}(dx^0)^2 + \sum_{k=1}^{3}(dx^{k\prime})^2 + E(r')(\sum_{k=1}^{3}x^{k\prime}dx^{k\prime})^2$$

となる． $E(r')$ は (36.2) の右辺の最後の項の $(r'dr')^2$ の前の係数である．

そこでこれから球対称静的重力場の ds^2 として，あらためて

$$ds^2 = - A(r)(dx^0)^2 + \sum_{k=1}^{3}(dx^k)^2 + B(r)(\sum_{k=1}^{3}x^k dx^k)^2 \tag{36.3}$$

とおく．A, B は r の正の未知関数である．これからラテン字は1, 2, 3を示すものとし，同じ文字がでてきたときは1から3まで和をとるものとする．ギリシャ字については従来どおり0, 1, 2, 3の値をとるものとする．

(36.3) から

$$\left.\begin{aligned} g_{ik} &= \eta_{ik} + Bx^i x^k, \\ g_{00} &= -A, \\ g_{0i} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{36.4}$$

この逆を求めると

$$\left.\begin{aligned} g^{ik} &= \eta^{ik} - \frac{B}{1+r^2B}x^i x^k, \\ g^{00} &= -\frac{1}{A}, \\ g^{0i} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{36.4$'$}$$

である．これを使うと

$$\sqrt{-g} = \sqrt{A(1+r^2B)} \overset{d}{\equiv} \varDelta$$

となる．あるいは A, B の代りに上に定義した $\varDelta$ と

$$\phi \overset{d}{\equiv} \sqrt{1+r^2B}$$

を独立の未知関数にとることもできる．

さて，0 でない $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ はつぎのものだけである：

$$\begin{aligned} \Gamma^{i}{}_{kl} &= \frac{x^i}{2r(1+r^2B)}(2Br\delta_{kl} + x^k x^l B'), \\ \Gamma^{i}{}_{00} &= \frac{A'x^i}{2r(1+r^2B)}, \\ \Gamma^{0}{}_{0k} &= \frac{A'x^k}{2Ar}. \end{aligned}$$

ここで $A' = dA/dr$, $B' = dB/dr$ である．

上の $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ から

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu}{}_{\mu k} &= \partial_k \log \varDelta = \frac{x^k}{r}\frac{\varDelta'}{\varDelta}, \\ \Gamma^{\mu}{}_{\mu 0} &= 0. \end{aligned}$$

したがって

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\rho} = \frac{2\varDelta'\phi'}{\varDelta\phi^3} - \frac{(\varDelta')^2}{\varDelta^2\phi^2} + \frac{2}{r}\left(1-\frac{1}{\phi^2}\right)\frac{\varDelta'}{\varDelta},$$

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\rho}=2\frac{\Delta'\phi'}{\Delta\phi^3}-\frac{(\Delta')^2}{\Delta^2\phi^2}.$$

結局，重力場の作用積分（22.13）は

$$I=\frac{1}{2c\kappa}\int\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}(\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\rho}-\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\rho})d^4x$$
$$=-\frac{1}{2c\kappa}\int\frac{2}{r}\left(1-\frac{1}{\phi^2}\right)\frac{d\Delta}{dr}r^2dr\sin\theta\,d\theta d\varphi dx^0.$$

つまり

$$I'=\int\left(1-\frac{1}{\phi^2}\right)\frac{d\Delta}{dr}r\,dr$$

の ϕ および Δ に関する Euler の方程式を求めればよい．

ϕ に関する変分からは

$$\frac{d\Delta}{dr}=0.$$

したがって

$$\Delta=b=\text{一定}.$$

また Δ に関する変分からは

$$\frac{d}{dr}\left\{r\left(1-\frac{1}{\phi^2}\right)\right\}=0.$$

そこで

$$r\left(1-\frac{1}{\phi^2}\right)=a=\text{一定}.$$

a, b を使ってもとの $A(r)$, $B(r)$ を求めると

$$A(r)=b^2\left(1-\frac{a}{r}\right),\qquad B(r)=\frac{a}{r^2(r-a)}.$$

ここで境界条件（36.1）のために，$r\to\infty$ で $A\to1$ となる．そのためには $b=1$ ととればよい．そこで

$$ds^2=-\left(1-\frac{a}{r}\right)(dx^0)^2+\sum_{k=1}^{3}(dx^k)^2+\frac{a}{r^2(r-a)}\left(\sum_{k=1}^{3}x^kdk^k\right)^2 \tag{36.5}$$

となる．あるいは直交座標 x^k を極座標（r, θ, φ）でかき直せば

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right)(dx^0)^2 + \frac{(dr)^2}{1-(a/r)} + r^2\{(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2\} \tag{36.5$'$}$$

となる.

(36.5) あるいは (36.5)$'$ を **Schwarzschild の解** という. はじめに仮定したように A, B が正であるためには

$$r > a$$

でなければならない.

積分定数 a をきめるには $r \to \infty$ における g_{00} の漸近形を調べればよい. $r \to \infty$ では, (17.1) と (17.6) により

$$g_{00} \to \eta_{00} - \frac{2\varphi}{c^2}, \qquad \varphi = -G\frac{M}{r}$$

となる. ここで M は原点にある物質の静止質量である. この境界条件を満たすためには

$$a = \frac{2GM}{c^2} \tag{36.6}$$

ととらねばならない. a を源の物質の **重力半径** という.

Schwarzschild の解は座標系を変換することにより, いろいろと異なる形にかき表わすことができる. なかでもよく使われるものは, **isotropic coordinate** を用いた場合の形式である.

いま **isotropic coordinate** を $(x^{0'}, x^{k'})$ とする. ただし $x^{0'} = x^0$ とする. また, ds^2 の空間部分 $d\sigma^2$ が

$$d\sigma^2 \overset{d}{\equiv} \frac{(dr)^2}{1-(a/r)} + r^2\{(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2\}$$

$$= F(r')\sum_{k=1}^{3}(dx^{k'})^2, \qquad r' = \{\sum_{k=1}^{3}(x^{k'})^2\}^{1/2}$$

となるようにする. あるいは $x^{k'}$ を極座標 (r', θ, φ) を使ってかくと

$$d\sigma^2 = F(r')[(dr')^2 + (r')^2\{(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2\}]$$

となる. そこで r と r' の間に

$$F(r')(r')^2 = r^2,$$

$$F(r')(dr')^2 = \frac{dr^2}{1-(a/r)}$$

が成り立つように F をきめればよい．はじめの式から

$$r = r'\sqrt{F(r')} \overset{d}{\equiv} K(r')$$

となるから，これを２番目の式に代入して r を消去すると

$$\frac{K}{r'}dr' = \left(1-\frac{a}{K}\right)^{-1/2}\frac{dK}{dr'}dr'.$$

これを積分すると

$$br' = K - \frac{a}{2} \pm \sqrt{K^2 - aK}\ .$$

r と r' の間の関係は $r = K(r')$ であるから b は２となり

$$2r' = r - \frac{a}{2} + \sqrt{r^2 - ar}\ . \qquad (36.7)$$

ここで $r \to \infty$ のとき $r' \to r$ という条件を用いた．(36.7) は

$$r = r'\left(1+\frac{a}{4r'}\right)^2 \qquad (36.7)'$$

とかくこともできる．これを使うと

$$ds^2 = -\frac{\{1-(a/4r')\}^2}{\{1+(a/4r')\}^2}(dx^0)^2 + \left(1+\frac{a}{4r'}\right)^4\sum_{k=1}^{3}(dx^{k\prime})^2. \quad (36.8)$$

(36.8) の特徴はその空間部分が $\{1+(a/4r')\}^4$ という因子を除けば Euclid 空間の計量と全く同じ形をしているということである． このために isotropic coordinate とよばれる．

さて，(36.5)′ をみると $r > a$ の領域から a に近づくに従って g_{00} は 0 に，$g_{11} = \{1-(a/r)\}^{-1}$ は ∞ に近づく． したがって $r = a$ は計量 (36.5)′ の特異面である．もしさらに r が小さくなって $r < a$ の領域にはいれば $g_{00} > 0$, $g_{11} < 0$ となる．すなわち x^0 軸は空間的に， また r 軸は時間的となる．* このような奇妙な面を **Schwarzschild の特異面** という． しかしこの面の上でも $R_{\mu\nu} = 0$ は成立しているから，空間内のこの球面は， 他の部分と同様に物質の

* それにもかかわらず (36.5) は Einstein の方程式を満足することがわかる．

存在しない真空である.

現実の物体を例にとってこの特異面の様子をもう少しくわしく考えてみよう. いま, 太陽のまわりの重力場が (36.5)′ で表わされているとする. このときは太陽の質量は $M_{\odot}=2\times10^{33}\,\mathrm{g}$ であるから $a=3\,\mathrm{km}$ となる. 太陽の実際の半径は $r_{\odot}=7\times10^{5}\,\mathrm{km}$ であるから, この特異面は太陽の中心近くにかくされている. そこでは太陽ガスが存在し, 真空の方程式 $R_{\mu\nu}=0$ は使用できない. Schwarzschild の解 (36.5)′ を適用できるのは $r\geqq r_{\odot}$ までである. したがって Schwarzschild の特異面は単なる数学的なものにすぎない. これが現実に問題になるためには物体 (星) の半径が, その重力半径 a より小さくなければならない. それには物体の質量密度が異常に大きい必要がある.

普通, 宇宙に散在する星の大多数は太陽と質量が大体に等しい. あまりにも大質量の星は自己の質量による重力 (凝集力) を支えきれずにつぶれてしまう. しかし太陽にしても, 現在は $7\times10^{5}\,\mathrm{km}$ という大きなガス塊であるが, それが膨張を続けているのは, 内部で起きている熱核反応にもとづく内圧が凝集力に打ち勝っているからである. しかし何年かのちに核融合を起こすべき材料の水素がなくなれば膨張はとまり, その巨大な質量にもとづく凝集力 (重力) により太陽は収縮をはじめる. これが重力崩壊とよばれる現象である. 太陽ぐらいの質量の星だと, 収縮の結果白色矮星となる. その半径はおよそ地球のそれと同じ程度の大きさである. それはさらに冷却し, ついには光も失った黒色矮星となる. これに対してもとの星の質量が太陽の質量 $M_{\odot}$ の数倍以上の重い星の場合には大爆発を起こす. それより以後はもとの質量の大小に応じて異なる運命をたどる. 爆発後, 星の実質部分が四散してあとに何も残らぬ場合もある. やや重い星ではその中心部分が塊のまま残り, それがさらに凝縮して中性子星となることもある. 中性子星とは, 重力による凝集力があまりにも強いため原子内の軌道電子が原子核の中にめり込み, 逆 β 過程

$$\text{陽子}+\text{電子}\rightarrow\text{中性子}$$

により星が中性子だけからできあがっている大きな原子核の状態になったものを指す. したがってその密度はおよそ $10^{15}\,\mathrm{g/cm^3}$ である. もし中性子星の全質

量を $M_\odot$ とすれば，その半径は大体 10 km である．一方，質量が $M_\odot$ の場合の a は 3 km であるから，この場合でもまだ Schwarzschild の特異面は星の中にかくされている．このようなわけで昔はこの特異面は現実の世界では問題にならないものとみなされていた．

しかし現在は宇宙に関するわれわれの知識は急速に増大した．星の進化の最終段階では中性子星よりもっと高密度のものもありうるであろうという種々の証拠も握っている．たとえば，上述の大爆発の後に，もとの星の残骸の塊の質量が $3M_\odot$ より大きいときは，その凝集力は非常に大きく，中性子星としてとどまるわけにはいかず，さらに凝縮がつづき，ついには星（残骸の塊）の表面が Schwarzschild の特異面を外から内に向かって通過してさらに絶望的に収縮を続ける．星のこのような末期的状態を**ブラック・ホール**という．

いま仮にブラック・ホールの状態にある星（残骸）の全質量を $M_\odot$ としよう．あるいは太陽がなにかの原因で，そのままブラック・ホールになったと仮定すれば，その半径は少くとも $a=3$ km より小さいはずであるから，その質量密度は，2×10^{16} g/cm^3，あるいはそれより大きくなる．

以上のような説明から Shwarzschild の特異面は必ずしも単なる数学的なものではなく，現実の宇宙でも存在しうると考えるのはきわめて妥当である.* そこで§40, §41 で，もう一度この特異面について議論することにしよう．

ここで一言，大事なことをつけ加えておこう．Schwarzschild の解を求めるのに本書では，$g_{\mu\nu}$ が時間に無関係という仮定を設けた．しかしこれを仮定しなくても，源の物質が球対称の質量分布をしているならば，たとえ物質が時間とともに半径方向の運動をしているとしても，球対称性だけが破られないかぎり，物質の存在しない領域の ds^2 は (36.5) あるいは (36.5)′ という形になることが証明された．これは **Birkhoff の定理**とよばれる．この定理の結論として，源の物質が r 方向の振動をしていてもそれは重力波を放出しないことがわかる．なぜなら，そのまわりの空間の計量 $g_{\mu\nu}$ は静的な物質のそれと全く同

* 単に理論的に予想されるばかりでなく，最近ではブラック・ホールとみなしてよい天体が発見されている（§41 参照）.

じであるからである.

§ 37. 重力による光のスペクトルの赤方偏移

太陽の周囲の重力場が Schwarzschild の解で表わされると考える. この解の応用例としてまず太陽の表面から放射された光を地球上で観測したとき, その振動数が地球上の同じ光の振動数に比べて小さくなること, つまり赤方偏移をこうむることを示そう. この問題は既に§4で説明されているが, ここで§4より厳密な方法で証明しよう.

いま, 太陽の表面に静止している光源 (その位置を $r = r_\odot$ = 太陽半径) から一定の方向に向かって, 座標時間 t_1 から $t_1 + \Delta t$ の間に n 個の光の波が放射されたとする. この光の進路はヌル測地線である.* θ, φ が一定であるから, (36.5)′ からそれは

$$0 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right)(c\,dt)^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 \qquad (37.1)$$

により表わされる. いま, 時刻 t_1 にでた光の先端が地球上の観測者 (その位置を $r = r_E$ とする) に到達した瞬間を, t_2 また最後にでた光が, 観測者に到達した時刻を $t_2 + \Delta t'$ とする.

(37.1) から

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{1}{c}\int_{r_\odot}^{r_E} \frac{dr}{1 - \dfrac{a}{r}} = \int_{t_1+\Delta t}^{t_2+\Delta t'} dt.$$

したがって

$$\Delta t = \Delta t' \qquad (37.2)$$

となる.

座標時間が Δt だけ進むあいだに光源の固有時間は

$$\Delta\tau_\odot = \sqrt{\left(1 - \frac{a}{r_\odot}\right)}\,\Delta t \qquad (37.3)$$

だけ進む. また, 座標時間が $\Delta t'$ だけ進むあいだに地球上の観測者 (地球は実

* 測地線 $x^\mu(\lambda)$ の接線ベクトル $dx^\mu/d\lambda$ が, この曲線の上のどの点でも常にヌル・ベクトルのとき, これを**ヌル測地線**と呼ぶ.

際には太陽に対して常に運動しているが，簡単のために，いまは太陽に対して静止しているものとみなす）の固有時間は

$$\Delta\tau_E = \sqrt{\left(1 - \frac{a}{r_E}\right)}\,\Delta t' \tag{37.4}$$

だけ進む．(37.2) を使うと，$r_\odot \ll r_E$ に注意するとき

$$\frac{\Delta\tau_\odot}{\Delta\tau_E} = \frac{\sqrt{-g_{00}(r_\odot)}}{\sqrt{-g_{00}(r_E)}} \approx \sqrt{1 - \frac{a}{r_\odot}}.$$

太陽表面の観測者からみた光の振動数は

$$\nu = \frac{n}{\Delta\tau_\odot}.$$

一方，同じ光源を地球上の観測者のそばに設置し，それから出る光の振動数を，その光源の固有時間（これはそばにいる観測者の固有時間 τ_E と同じものと考えてよい）を用いて測定したとすれば，その値はやはり ν である．これは“強い等価原理”による．本書のはじめに述べた等価原理によれば，重力場内の任意の場所に局所 Lorentz 系を設置するとき，その近傍では重力は0となり特殊相対論が成立する．しかしこれはわれわれ地球上の現代人が自己の経験から割りだした法則である．したがって厳密には地球の近辺でのみ，その正当性が確かめられているにすぎない．これが宇宙のいたるところで，また大昔から，遠い将来にいたるまで正しく成立する法則か否かは，うるさいことをいえば明らかでない．そこで上述の等価原理（10ページに述べたもの）にさらにつぎの2つの要請を追加したものを**強い等価原理**という．

1）上述の等価原理は，いつの時代にも，宇宙のいかなる場所でも成立する．

2）局所 Lorentz 系から眺めたとき，特殊相対論の法則や，またそれにでてくるディメンションのない普遍定数は，時空内のいかなる点においても同一である．

この強い等価原理にしたがえば，太陽上の光源と同じ物を地球上に置いたとき，それの出す光を，光源そのものの固有時間で測った振動数が，光源の置かれた場所によらず一定となることは当然である．

話をもとにもどして，太陽表面から放射されたこの光を地上でとらえて，そこで測定した振動数を ν' とすれば

$$\nu' = \frac{n}{\Delta\tau_E}.$$

したがって

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{\Delta\tau_\odot}{\Delta\tau_E} \approx \sqrt{1-\frac{a}{r_\odot}}\,, \tag{37.5}$$

あるいは

$$\frac{\nu-\nu'}{\nu} \approx 1-\sqrt{1-\frac{a}{r_\odot}} \approx \frac{a}{2r_\odot} = \frac{GM_\odot}{r_\odot c^2} = 2.12\times 10^{-6} \tag{37.6}$$

となる．これは (4.7) にほかならない．

(37.5) は波長を用いて以下のようにかきかえられる．まず光の r 方向の速さを v とすれば

$$v = \sqrt{g_{11}}\,\frac{dr}{dt} = c\sqrt{-g_{00}} = c\sqrt{\left(1-\frac{a}{r}\right)}\,.$$

いま太陽面上，並びに地球上で測った波長をそれぞれ λ, λ' とすれば，$r_E \gg a$ であるから

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{v'/\nu'}{v/\nu} \approx \left(1-\frac{a}{r_\odot}\right)^{-1}. \tag{37.7}$$

もし太陽の質量を現在のままに保ち，その半径をほとんど a に近い値にまで圧縮したとすれば，(37.7) から $\lambda'/\lambda = \infty$ となる．つまり Schwarzschild の特異面上から外に向かって放射された光を遠方で観測するとき，それは ∞ の赤方偏移をしている．

§38. Schwarzschild 時空における惑星運動

Schwarzschild の解の第2の応用例として惑星の運動を扱ってみよう．

太陽は空間座標系の原点に静止しているとする．惑星の座標を $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$, またその固有時間を τ とすれば，それの運動方程式は作用積分 (16.7)

$$I = -\int g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}d\tau, \qquad \dot{x}^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \tag{16.7}$$

から変分法により導かれる．(16.7) に Schwarzschild の解 (36.5)′ を代入すると，I は

$$I = -\int\left[-\left(1-\frac{a}{r}\right)(\dot{x}^0)^2 + \left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1}(\dot{r})^2 + r^2\{(\dot{\theta})^2 + \sin^2\theta(\dot{\varphi})^2\}\right]d\tau \tag{38.1}$$

となる．a は太陽の重力半径 $2M_{\odot}G/c^2$ である．そこで惑星の運動方程式はつぎのようになる．まず，x^0 に関する変分から

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\left(1-\frac{a}{r}\right)\dot{x}^0\right\} = 0. \tag{38.2}$$

θ, φ の変分からそれぞれ

$$r^2(\dot{\varphi})^2\sin\theta\cos\theta - \frac{d}{d\tau}(r^2\dot{\theta}) = 0, \tag{38.3}$$

$$\frac{d}{d\tau}\{r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}\} = 0 \tag{38.4}$$

となる．さらに r に関する変分からもう 1 個の式が求まるが，以上の 4 個の方程式と，固有時に関する定義式

$$c^2 = \left(1-\frac{a}{r}\right)(\dot{x}^0)^2 - \left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1}(\dot{r})^2 - r^2\{(\dot{\theta})^2 + \sin^2\theta(\dot{\varphi})^2\} \tag{38.5}$$

とは独立ではない．この中の 4 個を使えば惑星の運動はきまる．そこで r に対する Euler 方程式の代りに (38.5) を用いることにする．

ところで，(38.3)を τ について $n-1$ 回微分すれば $d^n\theta/d\tau^n$ と $d^k\theta/d\tau^k$($k=0, 1, \cdots, n-1$) の間の関係式が導かれる．そこで初期条件として，$\tau=0$ において $\theta=\pi/2$, $\dot{\theta}=0$ とおけば，(38.3) を τ について順次，微分することにより θ のあらゆる階数の微分がすべて 0 となることがわかる．したがって $\theta=\pi/2$ はひとつの解である．今後は θ を $\pi/2$ ときめる．つまり，惑星は x, y 面内で運動することになる．

(38.4) の θ を $\pi/2$ とおけば

$$r^2\frac{d\varphi}{d\tau} = h = \text{一定}. \tag{38.4$'$}$$

これは Newton 力学における面積速度一定の法則に相当する. また, (38.2) から

$$\left(1-\frac{a}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}=b=\text{一定} \tag{38.2'}$$

となる. $(38.4)'$ を使うと

$$r'\overset{d}{\equiv}\frac{dr}{d\varphi}=\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}=\frac{r^2}{h}\dot{r}. \tag{38.6}$$

そこで $(38.4)'$, $(38.2)'$ および (38.6) を (38.5) に代入して τ に関する微分をすべて消去すると, r と φ の間の関係式

$$1=\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1}\left\{b^2-\frac{h^2}{c^2}\left(\frac{r'}{r^2}\right)^2\right\}-\frac{h^2}{c^2r^2}$$

が導かれる. あるいは $u\overset{d}{\equiv}1/r$, $u'\overset{d}{\equiv}du/d\varphi$ とおけば

$$(u')^2+(u)^2-\frac{ac^2}{h^2}u-\frac{2E}{h^2}=au^3 \tag{38.7}$$

となる. ここで $c^2(b^2-1)$ の代りに $2E$ とかいた. この E は Newton 力学の場合の (質量が 1 の) 惑星のエネルギーに対応する.

(38.7) の右辺を 0 としたものは Newton 力学における軌道の方程式にほかならない. そこで, (38.7) の解を Newton 力学にまねて

$$u\overset{d}{\equiv}\frac{1}{r}=\frac{1}{l}\{1+e\cos(\eta\varphi)\} \tag{38.8}$$

とおく. $\eta=1$ とすれば Newton 力学における解となる. (38.8) を (38.7) の両辺に代入し, 両辺の cos の各べきを比較する. 偏心率 e は惑星の場合非常に小さいから, $e^3\cos^3$ の項を無視すればここに 3 個の関係式が導かれる. それをならべると

$$\frac{e^2\eta^2}{l^2}+\frac{1}{l^2}-\frac{ac^2}{h^2l}-\frac{2E}{h^2}=\frac{a}{l^3}, \tag{38.9}$$

$$\frac{2e}{l^2}-\frac{aec^2}{h^2l}=\frac{3ae}{l^3}, \tag{38.10}$$

$$-\frac{e^2\eta^2}{l^2}+\frac{e^2}{l^2}=\frac{3ae^2}{l^3}. \tag{38.11}$$

ところで (38.8) から, $r\approx l$, また $rd\varphi/d\tau\approx v=$ 惑星の速さ であるから

$h \approx lv$ と考えられる．そこで（38.10）の左辺の第2項と右辺を比較すると

$$\frac{aec^2}{h^2 l} \Big/ \frac{3ae}{l^3} \approx \frac{c^2}{3v^2} \gg 1.$$

したがって（38.10）の右辺を無視すれば

$$l = \frac{2h^2}{ac^2} \tag{38.12}$$

となる．これは Newton 力学の答と同じである．

（38.11）からは

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{3a}{l}} \approx 1 - \frac{3a}{2l} = 1 - \frac{3a^2c^2}{4h^2}. \tag{38.13}$$

たとえば惑星として地球を考えれば $l \approx 1.50 \times 10^8\,\mathrm{km}$，地球の平均速度は，30 km/sec．一方，太陽の a は 3 km である．したがって $1-\eta$ はおよそ 3×10^{-8} という非常に小さい数となる．

最後に，（38.9）に（38.12）を代入すると

$$e^2\eta^2 = 1 + \frac{2E}{h^2}l^2 + \frac{a}{l}$$

となる．$a/l \ll 1$ であるから右辺の第3項を無視し，さらに $\eta = 1$ とおくと

$$e^2 = 1 + \frac{2E}{h^2}l^2 = 1 + \frac{8Eh^2}{a^2c^4}. \tag{38.14}$$

これも Newton 力学の結果と全く同じである．

ところで，（38.8）で表わされる軌道において惑星が太陽に最も近づく点（**近日点**）は $\cos(\eta\varphi)$ が1となる点である．すなわち

$$\eta\varphi = 0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ \cdots.$$

したがって，惑星が或る近日点から出発して太陽を1周し，再び次の近日点にもどるためには，φ は

$$\frac{2\pi}{\eta} \cong 2\pi\left(1 + \frac{3a^2c^2}{4h^2}\right)$$

だけ増加する必要がある．つまり，惑星は 2π よりさらに

$$\delta \overset{d}{\equiv} 2\pi\frac{3a^2c^2}{4h^2} = \frac{3\pi a}{l} \tag{38.15}$$

だけ余計に回転してはじめて近日点となる．いま，惑星軌道の長軸半径 A と偏心率 e を用いて δ をかき表わすと

$$\delta = \frac{6\pi GM_{\odot}}{c^2 A(1-e^2)} \tag{38.15$'$}$$

となる．

さて，$a/l \ll 1$ であるから δ を実測することはきわめて困難である．なるべく δ を大きくするには e が比較的大きく，A の小さい惑星を選ぶ必要がある．この観点からみれば太陽系の最も内側を周遊している水星が最適である．水星の場合には近日点の前進する角度は（38.15)$'$ を使うと，100 年間に 43.03$''$ となる．実は一般相対論を使わなくても，惑星の近日点の移動の大部分は理論的に説明がつく．すなわち，問題の惑星以外の仲間の惑星からの重力が邪魔をするので，Newton 力学でも，惑星の軌道は楕円とはならず，その近日点は移動する．その結果，Newton 力学の範囲内でも観測値をほとんど再現できるが，理論値と実測値のあいだには極くわずかのくいちがいが残り，それは従来謎とされた．最も信頼されている実験値と Newton 力学による理論値とのくいちがいは水星の場合に，100 年間で 43.11 ± 0.45$''$ である．これが上述の Einstein の理論からの結果とぴたりと一致したのはまさに驚きである．Einstein の理論はまさに Newton の理論と実験値のあいだの溝を埋めたといえよう．

§39. 重力場内における光線の彎曲

Schwarzschild の解の第 3 の応用例として，太陽重力場のなかを進む光線が重力の影響で太陽の方に引きつけられるという現象をとりあげてみよう．

光の進路も測地線ではあるが，その接線ベクトルは常にヌル・ベクトルである．つまり，$d\tau = 0$ である．したがって光の進路を表わすには固有時間を使うわけにはいかない．そこである適当なパラメーター λ を用いて $x^\mu(\lambda)$ という形で光の軌道を表わすことにする．

$x^\mu(\lambda)$ の満足すべき方程式は §38 と同様に（38.2），（38.3），（38.4）である．ただし $\dot{x} = dx/d\lambda$ を表わす．また，接線ベクトルがヌル・ベクトルであるから，（38.5）の代りに

$$0=\left(1-\frac{a}{r}\right)(\dot{x}^0)^2-\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1}(\dot{r})^2-r^2\{(\dot{\theta})^2+\sin^2\theta(\dot{\varphi})^2\} \tag{39.1}$$

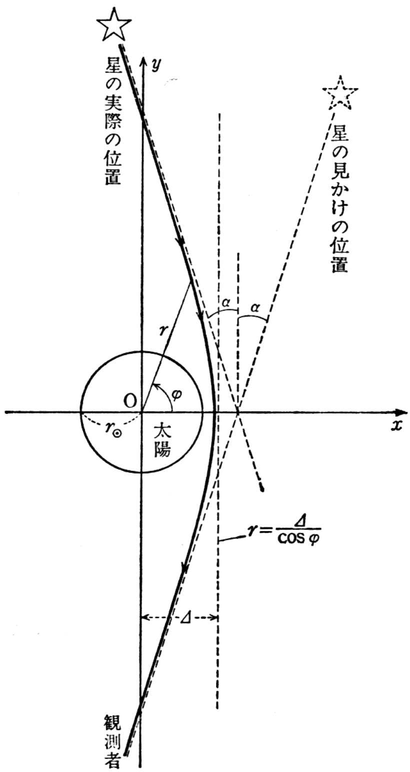
が成り立つ．

ここでも§38と同様に $\theta=\pi/2$ とおく．つまり光の軌道は xy 平面上にあるとする．また，(38.4)，(38.2) から

$$r^2\frac{d\varphi}{d\lambda}=h=\text{一定},\qquad \left(1-\frac{a}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda}=b=\text{一定}$$

が成り立つ．これらを (39.1) に代入し，λ に関する微分をすべて消去すると

$$(u')^2+u^2-\varDelta^{-2}=au^3 \tag{39.2}$$



第 11 図

となる．ここで，$u\overset{d}{\equiv}r^{-1}$，$u'\overset{d}{\equiv}du/d\varphi$ である．また $\varDelta$ は $|h/bc|$ を表わす．これは長さのディメンションをもつ定数である．

(39.2) の右辺は，左辺 u^2 の $au=a/r$ 倍であるから非常に小さい．そこで仮にこれを無視すれば

$$u=\frac{1}{\varDelta}\cos\varphi,$$

あるいは

$$r=\frac{\varDelta}{\cos\varphi} \tag{39.3}$$

という解が存在する．これは**第 11 図**の y 軸に平行な直線を表わす．この場合，y 軸とこの直線の間の間隔が $\varDelta$ である．

そこで，(39.2) の解を

$$u=\frac{1}{\varDelta}\cos\varphi+\chi(\varphi) \tag{39.4}$$

とおき，未知関数 χ を近似的に求

めてみよう．ここで $\varDelta^{-1} \gg |\chi|$ とし，χ の1次の項だけを残し，それ以外は無視することにする．(39.4) を (39.2) に代入すると，上に述べた近似では

$$\chi = \frac{a}{2\varDelta^2}(1+\sin^2\varphi) + \mathrm{const.}\sin\varphi$$

となる．ここで光の軌道が x 軸に関して対称となるように x, y 軸が選んであるとすれば，上の解の最後の項の const は 0 となる．したがって，光の軌道は

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\varDelta}\cos\varphi + \frac{a}{2\varDelta^2}(1+\sin^2\varphi) \tag{39.5}$$

となる．

(39.5) を用いて光線の入射角と無限遠に飛び去る方向を調べよう．それには $r\to\infty$ となるときの φ を求めればよい．$\chi(\varphi)$ を無視した場合 $\varphi=\pm\pi/2$ で $r\to\infty$ となる．そこで，(39.5) の r が ∞ となるときの φ を

$$\varphi = \pm\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) \qquad \alpha \ll 1$$

とおけば，α は

$$0 = \frac{1}{\varDelta}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + \frac{a}{2\varDelta^2}\left\{1+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right\}$$

を満足しなければならない．α の1次までの近似でこれを解くと

$$\alpha \approx \frac{a}{\varDelta}. \tag{39.6}$$

したがって，光の屈折角は

$$2\alpha \approx \frac{2a}{\varDelta}$$

となる．$\varDelta$ を太陽の半径 $r_\odot = 7\times10^5\,\mathrm{km}$ としたとき屈折角は最大となる．このときの 2α は

$$2\alpha \approx \frac{2\times3}{7\times10^5} = 8.5\times10^{-6}(\mathrm{rad}) = 1.75'' \tag{39.7}$$

である．

この結果は皆既蝕を利用して実験的に確かめられた．2α が $\varDelta$ に反比例するという理論的結果は定性的には実験データとよく合うが，定量的には，一致は必ずしも満足なものとはいいかねる．

実は一般相対論によらなくとも，Newton 力学を用いて光線の彎曲を導くことができる．すなわち，光子を，非常に小さいが0ではない質量をもつ粒子とみなし，その無限遠における初速を c とする．この粒子の軌道を Newton 力学により計算すると，その屈折角は（39.7）のちょうど半分となる．そこで，このようにして導かれた理論値と（39.7）を実験値と比べると，実験値は（39.7）の方に近い．このような意味において（39.7）の正しいことが実験的にも証明された．

§40. ブラック・ホールの近くにおける光の振舞

§36 で述べたように Schwarzschild の解（36.5)′は $r=a$ という球面上で $g_{11}=\{1-(a/r)\}^{-1}$ が∞となる．しかし isotropic coordinate を用いた(36.8)では空間部分の $g_{ik}(i,\ k=1,\ 2,\ 3)$ は $r'=0$ を除いてはどこにも特異点をもたない．もっとも，g_{00} は，$r'=a/4$ で0となる．このように Schwarzschild の特異面は座標系のとりかたに依存する．これに似た事は3次元 Euclid 空間の中の球面上に設けた座標にもある．たとえば半径1の球面上の点の位置を，球の中心を原点とした極座標で表わしたとしよう．この場合，南北両極点はすべての子午線が1点に集まるから球面上の他の点とは異なった，いわば特異点である．そこでは $\det(g_{ik})$ は0となる．しかし南北の軸をかたむけて，新しい極座標系を設ければ，以前の両極はもはや特異性をもたない．つまり両極は座標系の特異点である．

これと同様に，Schwarzschild の特異面も座標系に由来する特異面というべきであろう．なぜなら，§36 でも述べたようにこの面上でも $R_{\mu\nu}=0$ は成立し，そこには物質は存在しない．真の特異点は $r=0$ だけである．このことは時空の物理的（あるいは幾何学的）特性を示す曲率テンソルについて調べればすぐにわかる．$R_{\mu\nu\rho\sigma}$ から作った不変量

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$$

は $r=0$ では r^{-4} という特異性をもつ．これに対して $r=a$ の面上では $12/a^4$ となる．明らかに正則点である．しかし（36.5)′を用いると，$r=a$ では計量

テンソル $g_{\mu\nu}$ は特異性をもつから，この系からみれば，重力場内を運動する質点もこの近傍では異常な振舞をする．したがって，質点の運動をとおして，この特異性の物理的意味を知ることは大いに意義がある．

さきにも述べたように，弱い重力場の場合には Einstein の理論は近似的に Newton のそれと一致する．Schwarzschild の解を例にとれば $a/r \ll 1$ の場合がこれに相当する．Einstein の理論が Newton の理論と異なった特徴を発揮するのは $a/r \approx 1$ の場合である．この観点からも Schwarzschild の特異面の近傍における時空の性質を調べることは重要である．なお $a/r \ll 1$ の場合を弱い重力場と呼ぶことに対し，$a/r \approx 1$ の場合を **強い重力場** という．

これから超高密度の星が座標原点に静止している場合を考えよう．その半径 r_0 は，この星の Schwarzschild 半径 a よりも小さく，したがって Schwarzschild の特異面が星を包んでいるものとしよう．星の外部（$r > r_0$）では，ds^2 は (36.5)′ で表わされるとする．

そこでまず特異面の近くにおける光線の振舞をしらべてみよう．光の進路はヌル測地線である．そこで，θ, φ を固定したときの方程式は，(39.1) から，$r > a$ に対して

$$\frac{dr}{dt} = \pm c\left(1 - \frac{a}{r}\right) \tag{40.1}$$

となる．これはある1点から半径にそってある一定の方向に進む光線の振舞を表わす．いま，時刻 $t = 0$ に1点 r_2 から出た光が中心に向かって進み，それが点 $r_1(< r_2)$ に到達したときの時刻を t としよう．(40.1) を積分することにより

$$-\int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{1-(a/r)} = c\int_0^t dt,$$

すなわち，$r_2 > r_1 > a$ に対して

$$t = \frac{1}{c}(r_2 - r_1) + \frac{a}{c}\log\frac{r_2 - a}{r_1 - a} \tag{40.1$'$}$$

となる．

ところで，座標系に対して静止している観測者の固有時間を τ_0 とすれば，

(36.5)′ から（$\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ が 0 であるから）

$$d\tau_0 = \sqrt{\left(1-\frac{a}{r}\right)}\, dt.$$

特に無限遠点に静止している観測者に対しては $d\tau_0 = dt$ となる．つまり座標時間 t は無限遠に静止している観測者の固有時間にほかならない．したがって，(40.1)′ はこのような観測者からみた光の振舞を示す．いま，光の到達点 r_1 を a に近づけると (40.1)′ から $t \to \infty$ となる．また (40.1) をみると，この観測者からみた光の速さは 0 に近づく．

上と逆に点 $r_1(<r_2)$ から発射された光が r_2 に到達するに要する時間を t とするとき，t と r_1, r_2 の間の関係も (40.1)′ であたえられる．ところで，いかなる $r_2(>a)$ に対しても $r_1 \to a$ とすれば $t \to \infty$ となるから，Schwarzschild の特異面上から発射される光は面を離脱するのに無限大の時間がかかることになる．要するに，無限遠に静止している観測者からみると，外から特異面に向かって進む光は面に到達するのに無限大の時間がかかり，また逆に面上あるいは面の内側から出る光は面を離脱できず，したがって観測者はそれを眼にとらえることができない．

以上の説明にはもっぱら光を用いたが，後に示すように質量をもつ物質粒子についても同様のことがいえる．そこでこの面を**事象の地平線**（event horizon）と呼ぶ．地球上でわれわれの見る地平線の手前のものは見ることができるが地平線の向こう側の地球上の物体は絶対に見ることができない．地平線のこのような性質と上述の特異面の性質とがよく似ているので，このように名づけられた．換言すれば星を中心とする半径 a の球状の穴が空間の中に存在する．この穴は，それに向かって外から光や物質がとびこむことはできるが（内部にとびこめることについては後に再び説明する），そこからとび出すことはできないような恐るべき領域である．特に光が外にでて来ないから，外からみるとこの穴は真黒である．また，§37 で述べたようにそこから来る光は∞の時間の後に面を離れるが，それを面の外で見ると，波長は∞となる．この意味でも穴は黒く見える．そこで一般に事象の地平線の内側の空間を**ブラック・ホ**

ール という．この名前は Schwarzschild の特異面に包まれた部分に限らない．Schwarzschild の面の内部の空間はブラック・ホールの最も簡単な例である．たとえば，中心の星が自転していれば，ブラック・ホールも Schwarzschild の解の場合と様子が異なるであろうということは容易に納得できよう．

ブラック・ホールの内部における光の振舞を調べるには isotropic coordinate (36.8) を用いるほうが都合がよい．これを極座標を用いてかくと

$$ds^2 = -\frac{\{1-(a/4r')\}^2}{\{1+(a/4r')\}^2}(dx^0)^2 + \left(1+\frac{a}{4r'}\right)^4[(dr)^2 + r^2\{(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2\}]. \tag{36.8}$$

(36.5)′ にでてきた r と (36.8) の r' との関係は

$$r = r'\left(1+\frac{a}{4r'}\right)^2 \qquad (36.7)'$$

である．したがって $r'=a/4$ が Schwarzschild の特異面である．しかし isotropic coordinate の便利な点は $r'=a/4$ においても特異点がないということである．また，ブラック・ホールの内部に入っても x^0 は時間変数の性格を保持している．なぜなら $dx^k=0$ ($k=1, 2, 3$), $dx^0 \neq 0$ というベクトルはブラック・ホールの内部でも $ds^2<0$ となるからである．これもこの座標系の長所といえよう．

(36.8) を使うと光の進路は (θ, φ を一定とする)

$$\frac{dr'}{dt} = \pm c\frac{1-(a/4r')}{\{1+(a/4r')\}^3}. \tag{40.2}$$

これは，源の星の外側ではどこにおいても ($r'<a/4$ でも) 成立する方程式である．$r'=a/4$ では，無限遠に静止している観測者からみた光の速さは 0 となる．

光が r_1' から r_2' まで進む時間を t とすれば，$r_2'>r_1'>a/4$ の場合には，(40.2) を積分することにより

$$ct = r_2' - r_1' - a\log\frac{r_2'}{r_1'} + \frac{a^2}{16}\left(\frac{1}{r_2'}-\frac{1}{r_1'}\right) + 2a\log\frac{r_2'-(a/4)}{r_1'-(a/4)} \tag{40.3}$$

となる.

また，$a/4 > r_2' > r_1'$ のときは

$$ct = \left[r' - a\log r' + \frac{a^2}{16r'} - 2a\log\left\{\frac{a}{4} - r'\right\}\right]_{r_1'}^{r_2'} \qquad (40.3)'$$

となる．(40.3)′ で $r_2' \to a/4$ とすると $t \to \infty$ となる． つまりブラック・ホールの内部の点 r_1' から出た光が， 内側から特異面に到達するには（座標時間 t を用いると）無限大の時間がかかる．したがって，内部から発射された光を外の観測者は絶対にみることはできない．したがって，無限遠に静止している観測者がブラック・ホールをながめたとき，外からブラック・ホールに向かう光は存在しても，ブラック・ホールから観測者にもどってくる光は存在しないから Schwarzschild の特異面は半透膜の性質をもつ.

これによく似た事情は特殊相対論でも存在する．いま，ロケットが地球から天空に向かって時刻 $t=0$ に初速度 0 で発射されたとする．地球の重力は無視し， すべてを特殊相対論のワクのなかで考える． 地上から鉛直上方に z 軸をとる．各瞬間においてロケットの瞬間的静止系からみた自己の上向き加速度を a とする．その場合，時刻 $t = x^0/c$ におけるロケットの位置 z は

$$z = \frac{c^2}{a}\sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2} - \frac{c^2}{a}$$

となる．これは

$$\left\{\frac{z+(c^2/a)}{c^2/a}\right\}^2 - \left\{\frac{x^0}{c^2/a}\right\}^2 = 1$$

という双曲線である．この漸近線は

$$x^0 = z + \left(\frac{c^2}{a}\right)$$

である．いま，ロケットが発射されてから，これを追って地上から光を発射したとしよう．時刻 t_1 に発射された光の先端は

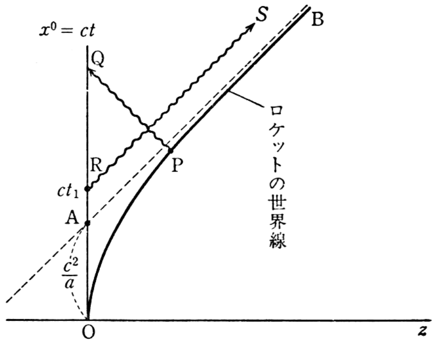
$$x^0 = z + ct_1$$

で表わされる．もし $t_1 \geqq c/a$ ならば任意の時刻 $t > t_1$ において

$$z(\text{ロケット}) - z(\text{光}) = \frac{c^2}{a}\sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2} - \frac{c^2}{a} - ct + ct_1 > 0$$

となる．つまり，光はロケットには絶対にとどかない．

この事情は**第12図**を見れば一目瞭然である．つまり漸近線 AB は半透膜の性質をもつ．ロケットから発射する光 PQ は必ず地球にとどく（到着点は Q）．しかし直線 AB より上にある，地球からの光線 RS は漸近線 AB に平行で，これをよぎることはできない．したがって，ロケットの上の人は時刻 c^2/a（点 A）以後の地球をみることはできない．



第 12 図

§41. ブラック・ホールの近くにおける質点の運動

前節と同じようにブラック・ホールの内部および外部における質点の運動を調べてみよう．

まず ds^2 としては (36.5)′ を用いる．はじめは簡単のために角運動量 $h=0$ の場合を扱う．また，§38 と同様に質点は x, y 面内で運動するとしよう．したがって $\theta=\pi/2$，また $\dot{\varphi}$ は 0 である．つまり質点がある半径にそって運動する場合を扱う．

まず，(38.2)′ から

$$\left(1-\frac{a}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}=b=\text{一定}. \tag{38.2$'$}$$

これを (38.5) に代入し，$\dot{\theta}=0$，$\dot{\varphi}=0$ とおくと，r と t の間に

$$\frac{dr}{dt}=\pm\frac{c}{b}\left(1-\frac{a}{r}\right)\sqrt{b^2-1+\frac{a}{r}} \tag{41.1}$$

が成り立つ．

ここで質点は十分に大きな運動エネルギーをもっているために無限遠にまで到達できるとする．したがって，無限遠における粒子の速さを $v_\infty=c\beta$ とおけば，(38.2)′ から

$$b = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

となる．いま簡単のために $v_\infty = 0$ としよう．このとき質点が点 r_2 から $r_1(>a)$ に到達するのに要する時間 t は，$r_2 > r_1 > a$ とすると

$$\begin{aligned} c\int_0^t dt &= -\int_{r_2}^{r_1} \sqrt{\frac{r}{a}}\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1} dr \\ &= \frac{2}{3\sqrt{a}}\{r_2^{3/2} - r_1^{3/2} + 3a(\sqrt{r_2} - \sqrt{r_1})\} \\ &\quad + a\log\frac{(\sqrt{r_2}-\sqrt{a})(\sqrt{r_1}+\sqrt{a})}{(\sqrt{r_1}-\sqrt{a})(\sqrt{r_2}+\sqrt{a})} \end{aligned} \tag{41.2}$$

となる．もし r_1 を a に近づければ，(41.1) からわかるように，無限遠に静止している観測者のみた落下速度 dr/dt は 0 に近づく．また (41.2) によれば，$r_1 = a$ に到達するには∞の時間がかかる．

これに対して，もし質点の運動をそれの固有時間を用いて表わすと事情は全く異なる．すなわち，(41.1) の代りに (自由落下のとき)

$$\frac{dr}{d\tau} = -c\sqrt{b^2 - 1 + \frac{a}{r}}. \tag{41.3}$$

したがって $r = a$ においても，質点にくくりつけた時計を用いて時間を測れば，質点の落下速度は 0 にならない．$v_\infty = 0$ の場合に (41.3) を積分すると

$$c\tau = -\int_{r_2}^{r_1}\sqrt{\frac{r}{a}}\,dr = \frac{2}{3\sqrt{a}}(r_2^{3/2} - r_1^{3/2}) \tag{41.4}$$

となる．(41.3)，(41.4) は $r_1 < a$ の場合でも，任意の $r_1 > 0$ に対して成立する．これらの式からつぎのことがわかる．質点に縛りつけた時計で時間を測ると，点 r_2 を初速 $c\sqrt{a/r_2}$ で自由落下をはじめた質点は次第にその降下速度を増し，有限の時間

$$\tau = \frac{2}{3c\sqrt{a}}(r_2^{3/2} - a^{3/2})$$

の後に，Schwarzschild の特異面に到達する．そのときの降下速度は (41.3) によれば c である．質点はさらに速度を増加しつつブラック・ホールの内部に

進入し，スタートしてから

$$\tau = \frac{2}{3c\sqrt{a}} r_2^{3/2}$$

の後にはついに原点（簡単のために中心の星も点とする）に到達する．このように質点と一緒に運動する観測者からみれば，事象の地平線でも，またブラック・ホールの内部でも何の異常も認めない．

なおここで注目すべき奇妙なことがある．(38.2)$'$ の b は無限遠における質点の τ と座標時間の関係から正の定数ときめることができる．そこで特異面の外では τ が増加すれば t も増大する．これに反して特異面の内側では τ が増加すると逆に t は減少する．このことからも内側で t を時間変数として採用するには無理のあることがわかる．

上に述べた運動の向きを逆にして，ブラック・ホールの内部の点 $r_1(<a)$ から外に向かって質点を飛び出さすこともできる．この質点が特異面を通りぬけて外部の点 $r_2(>a)$ に到達するまでに要する固有時間は (41.4) で与えられる．しかしこれを無限遠に静止している人がみると，質点が内部の点から特異面に達するまでに既に無限大の時間（座標時間）がかかる．さらに特異面から離脱するにもまた無限大の時間を必要とする．したがって，質点がブラック・ホールの内部から地平線をつきぬけて外に飛び出すという現象は外部の観測者にとっては起こりえないことである．

以上に述べたことはつぎのことをわれわれに教えてくれる．すなわちブラック・ホールの外側では物理現象を描き表わすのに座標時間 t は便利な変数である．しかし事象の地平線をのりこえて，ブラック・ホールの内部にまで達する現象を記述するには t は不適当である．

ところで，ブラック・ホールの内外を問わず，質点の運動を表わす4元ベクトル $dx^\mu/d\tau$ は時間的ベクトルである．したがって

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} < 0$$

でなければならない．いま，特に $dx^0 = cdt > 0$, $dr = 0$ (θ, φ は一定）という変位を考えると，ブラック・ホールの内部では

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}=-\left(1-\frac{a}{r}\right)c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2>0$$

となる．したがって質点はこのような変位をなしえない．これに反して $dt=0$, $dr\neq 0$ という変位は

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}=\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2<0.$$

したがってこれは質点が実行できる変位である．このことはブラック・ホールの内部で t が時間座標の役をはたしていないことを示すものといえよう．

なお，τ が有限の時間しかたたないのに，t を使うと ∞ となる理由は，両者の関係を示す (38.2)′ をみれば容易に納得できよう．

つぎに，角運動量 h が 0 でない場合を考えよう．この場合も $\theta=\pi/2$ とする．運動方程式は (38.2)′ のほかに

$$r^2\frac{d\varphi}{d\tau}=h=\text{一定},\tag{38.4′}$$

および r に関する変分から導かれる方程式

$$\frac{a}{r^2}(\dot{x}^0)^2+\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-2}\frac{a}{r^2}(\dot{r})^2-2r(\dot{\varphi})^2+2\frac{d}{d\tau}\left\{\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1}\dot{r}\right\}=0,\tag{41.5}$$

最後に固有時間の定義式

$$c^2=\left(1-\frac{a}{r}\right)(\dot{x}^0)^2-\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1}(\dot{r})^2-r^2(\dot{\varphi})^2\tag{38.5}$$

である．

(38.5) に (38.2)′, (38.4)′ を代入して $\dot{\varphi}$, $\dot{x}^0$ を消去すると

$$\frac{1}{2}(\dot{r})^2+V(r)=\frac{1}{2}c^2(b^2-1)\tag{41.6}$$

となる．ここで，ポテンシャル $V(r)$ は

$$V(r)\overset{d}{\equiv}-\frac{GM}{r}+\frac{h^2}{2r^2}-\frac{ah^2}{2r^3}\tag{41.7}$$

である．M はブラック・ホールの中心の星の質量を表わす．

(41.6), (38.2)′, (38.4)′ を (41.5) に代入し，$\dot{r}$, $\dot{x}^0$, $\dot{\varphi}$ を消去すると

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{GM}{r^2} + \frac{h^2}{r^3} - \frac{3ah^2}{2r^4} \tag{41.8}$$

となる．あるいは $V(r)$ を使うと

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{dV(r)}{dr}. \tag{41.8$'$}$$

これを積分すると（41.6）が導かれる．この意味で（38.2)′,（38.4)′,（41.5）と（38.5）は独立ではない．

（41.6）は Newton の力学におけるエネルギーの式によく似ている．この左辺は質量が 1 の質点の力学的エネルギーとみなすことができる．そこで，積分定数 b の代りに

$$E \overset{d}{\equiv} \frac{1}{2}c^2(b^2-1) \tag{41.9}$$

とかくことにする．したがって，（41.6）から

$$(\dot{r})^2 = 2\{E - V(r)\} \tag{41.6$'$}$$

となる．

（41.8）の右辺の第 3 項がなければ，これは Newton の式にほかならない．第 2 項は質点が角運動量をもっているための遠心力を表わす項である． Newton の理論では第 3 項がないから，質点が中心の星に対して

$$r < \frac{h^2}{GM}$$

の程度に近づけば，h が 0 でないかぎり，遠心力は必ず重力にうちかつ．また

$$(\dot{r})^2 = 2(E - V_{\mathrm{Newton}})$$

の右辺は有限の大きさをもつある $r(\neq 0)$ に対して 0 となる． その位置で質点の速度は反転し，星から遠ざかることになるから， 星に捕獲されることはない．

これに反して Einstein の理論では， $h \neq 0$ のときは（41.8） の第 3 項のような引力の項がある．これは r が小さくなると遠心力よりも大きくなる．そこで（41.8）の 3 種の力の大小関係を調べてみよう．

第 13 図 はポテンシャル $V(r)$ のグラフである．

$$h \geqq 2ac$$

ならば

$$\frac{1}{r_\pm} \stackrel{d}{\equiv} \frac{1}{2a}\left\{1 \pm \sqrt{1-\frac{4a^2c^2}{h^2}}\right\} \qquad \text{(複号同順)}$$

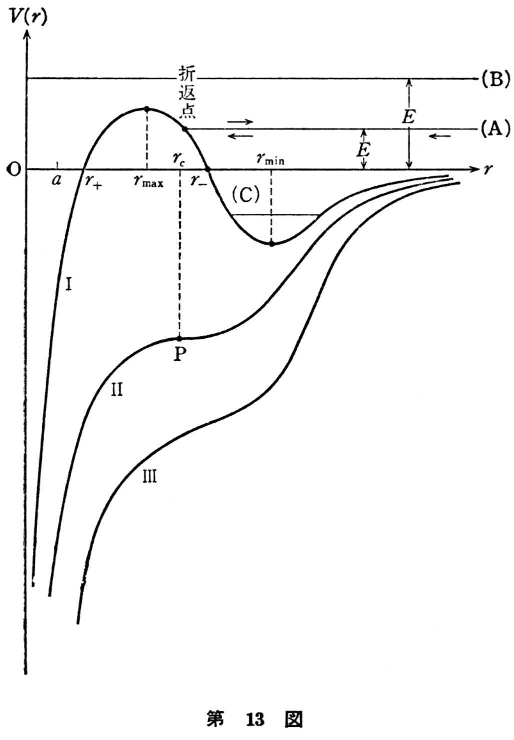
で $V(r)$ は0となる（$r_- > r_+ > a$ に注意）．また

$$h \geqq \sqrt{3}\, ac$$

ならば

$$\frac{1}{r_{\max}} \stackrel{d}{\equiv} \frac{1}{3a}\left\{1+\sqrt{1-\frac{3a^2c^2}{h^2}}\right\}, \qquad \frac{1}{r_{\min}} \stackrel{d}{\equiv} \frac{1}{3a}\left\{1-\sqrt{1-\frac{3a^2c^2}{h^2}}\right\} \tag{41.10}$$

において，V はそれぞれ，極大ならびに極小となる．第13図の曲線Iは $h > 2ac$ の場合である．IIは $2ac > h = \sqrt{3}\, ac$ の場合を示す．このときは $r_{\max}$ と $r_{\min}$ とは一致する．最後にIIIは $h < \sqrt{3}\, ac$ の場合を示す．このときは $-dV/dr$ は常に負となるから質点は常に引力を受ける．したがって質点は必ず中心の星に捕獲される．



第 13 図

さて，これから角運動量が h，エネルギーが $E>0$ の質点が無限遠点からブラック・ホールに向かって入射するとしよう．これが途中でポテンシャルの壁にはね返されるためには，(41.6)$'$ からわかるように，$E-V(r)$ が r のある値において0となる必要が

ある．この点が質点の折返し点である．これに反して

$$E - V(r_{max}) > 0 \tag{41.11}$$

ならば質点の落下速度は決して0とならないから，質点は事象の地平線をつきぬけて，ついには星に捕獲される．

いま，質点のエネルギー E を縦軸に，その位置 r を横軸にとると，質点の軌道は横軸からの高さが E の水平な直線で表わされる．第13図の（A）はポテンシャルの壁ではね返される場合，（B）は星に捕獲される場合を示す．

ここで，一定のエネルギー E をもった質点が無限遠点で x 軸に平行に入射するとして，これのブラック・ホールによる捕獲断面積を計算してみよう．

いま，無限遠における質点の座標を

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi = r_0 = 一定 \tag{41.12}$$

とする．ただし $r\to\infty$，$\varphi\approx 0$ である．（41.12）の第2式を τ で微分し，それに r を掛けると

$$0 = r\sin\varphi\frac{dr}{d\tau} + r^2\frac{d\varphi}{d\tau}\cos\varphi.$$

$\varphi\to 0$，$r\to\infty$ の極限で $dr/d\tau = -\sqrt{2E}$，$r^2 d\varphi/d\tau = h$ であるから

$$r_0\sqrt{2E} = h \tag{41.13}$$

となる．

ここで，質点の無限遠における入射速度を c とする．したがって，（38.2）′ および（41.6）′ から

$$\sqrt{2E} = -\frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \lim_{\beta\to 1}\frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \infty.$$

そこで，h も ∞ となるから，（41.10）により

$$r_{max} = \frac{3}{2}a = 3\frac{GM}{c^2}. \tag{41.14}$$

したがって，質点が星に捕獲されるための条件（41.11）は，（41.14），（41.7）により

$$E + \frac{c^2}{3} - \frac{2}{27a^2}h^2 \geqq 0$$

となる．あるいは（41.13）を使うと

$$E\left\{1-\frac{4}{27}\left(\frac{r_0}{a}\right)^2\right\}+\frac{c^2}{3}\geqq 0. \tag{41.15}$$

$E=\infty$であることに留意すれば，（41.15）が成立するためには

$$\frac{27}{4}a^2\geqq(r_0)^2$$

が成立する必要がある．したがって，無限遠において x 軸に垂直な平面上の，x 軸を中心とし半径が $\sqrt{27}\,a/2$ の円板をつらぬいて入射する光速度をもつ粒子は，すべてブラック・ホールに捕獲される．それゆえ無限遠で yz 面の単位面積ごとに毎秒1個の割合で粒子が入射するとすれば，$\pi\cdot 27a^2/4$ 個の粒子が捕獲される．したがって，捕獲断面積は

$$\sigma(\text{捕獲})=\frac{27}{4}\pi a^2=27\pi\frac{(GM)^2}{c^4} \tag{41.16}$$

である．

最後に，第13図の点Pについて一言つけ加えよう．既に述べたように $h<\sqrt{3}\,ac$ ならば，質点はどんなエネルギーをもっていようとも必ずブラック・ホールにとびこむ．逆に $h>\sqrt{3}\,ac$ のときは V はIのタイプとなるから線分（C）で表わされるような安定な軌道が存在する．これは $E<0$ のときに起きるもので，惑星の軌道はこれにあたる．$h=\sqrt{3}\,ac$ のときは

$$r_c\overset{d}{\equiv}r_{\max}=r_{\min}=3a=\frac{6GM}{c^2}$$

となる．もし粒子のエネルギーが

$$E_c\overset{d}{\equiv}V(r_c)=-\frac{c^2}{18}$$

ならば $\dot{r}$ も $\ddot{r}$ も同時に0となり，質点は半径 r_c の円運動をする．しかしこれは非常に不安定な運動で，何かのはずみで質点の位置が r_c よりちょっとでも内側にずれるとたちまちブラック・ホールに引きこまれる．つまり r_c より小さい半径の軌道でブラック・ホールにつかまらないような軌道は存在しない．

いままでブラック・ホールとしては最も簡単な，しかしわかりやすい Schwarzschild 型のそれについて，その周囲における光線や質点の振舞を説明し

てきた．それによるとブラック・ホールから物質粒子も光も外にとび出すことはできないから，これを外部から観測することは不可能のように思われる．しかし，ブラック・ホールの外部で，これに極く近接した部分ではブラック・ホールからの重力が極度に強いから，それによる影響を通して間接的にブラック・ホールの存在を確かめることはできよう．このような推論にもとづけば，孤立したブラック・ホールを観測することは困難だとしても，連星の一方が観測可能な普通の星であり，その相手がブラック・ホールのような場合ならば，普通の星の振舞を通して，間接的にブラック・ホールの存在を確認できるであろう．

このようなタイプの連星のなかで今日までに知られている最も有力な候補者は白鳥座の X-1 とよばれる周期的に X 線を出す天体である．この連星のうちで観測可能な通常の星はその質量が $20\sim30\,M_\odot$ という超巨星である．またこれのまわりを周遊するブラック・ホールと思われるものの中心にある星の質量は $5\,M_\odot$，あるいはそれ以上と推論されている．また，放出される X 線の性質から，逆にこの第 2 の星はその大きさが非常に小さいと考えられる．普通，X 線の源と考えられる天体としては中性子星が考えられる．しかし，上述の伴星は中性子星とみなすには質量が大きすぎる．したがってそれはブラック・ホールと考えざるをえない．なお X 線放射のメカニズムとしては，ブラック・ホールの強力な重力により巨大な通常の星から吸出されたガスがブラック・ホールに向かって収束しながら流れこむ際に，ガスは渦巻きを起こし，発熱し，特異面の直前でついには X 線を放射すると考えられている．

§42. Kruskal 座標

前節で何度も述べたように，Schwarzschild の用いた座標系

$$dr^2 = -\left(1-\frac{a}{r}\right)(dx^0)^2 + \left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1}(dr)^2 + r^2(d\omega)^2, \quad (42.1)$$

$$(d\omega)^2 \overset{d}{\equiv} (d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2$$

は特異面 $r=a$ の外では便利な座標系であるが，特異面の近くや，そこを通

過して内部にまで立ち入る現象を扱う際は誠に不便な座標系である.

これに対して Kruskal* はつぎのような便利な座標系 (v, u, θ, φ) を考えた. これはもとの $(x^0, r, \theta, \varphi)$ 系でいえば点 $r=0$ 以外は, どこにも 0 点も特異点も持たないという特徴をもつ:

$$ds^2 = f^2\{-(dv)^2 + (du)^2\} + r^2(d\omega)^2. \tag{42.2}$$

ここで $f^2(u, v)$ はもとの変数でかいたときは r だけの関数とし, $u=v=0$ で f^2 は 0 にもならず, また∞ともならないという要請を満足するものとする. このような強い要請のために

$$(r, x^0) \to \{u(r, x^0), v(r, x^0)\}$$

という変換は, 本質的には一意的にきまってしまう. 新旧座標の関係をかくとつぎのようになる.

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = e^{r/a}\left(\dfrac{r}{a} - 1\right), \\ r > a \text{ のとき } \dfrac{v}{u} = \tanh\dfrac{x^0}{2a}, \qquad r < a \text{ のとき } \dfrac{u}{v} = \tanh\dfrac{x^0}{2a}. \end{cases} \tag{42.3}$$

上の第1式は r と a の間の大小関係の如何にかかわらず成り立つ関係である. $f^2(r)$ はもとの r を使ってかくと

$$f^2(r) = \frac{4a^3}{r} e^{-r/a} \tag{42.4}$$

である. これらの関係式をみると, (42.2) に与えられた計量は $r=0$ を除いては u, v 空間のどこででも正則であることがわかる. なお, u, v をあたえると (42.3) から r, x^0 は1通りにきまる. なぜなら, (42.3) の右辺はいずれの式もそれぞれ r, x^0 について単調増加関数であるからである.

(42.3)を解いて u, v を r と x^0 の関数としてかくには $r>a$, $r<a$ の2つの場合に分けねばならない.

A) $r > a$ の場合

このときは r, x^0 を与えたとき, これに対してつぎのような2組の (u, v)

---

* M.D. Kruskal: Phys. Rev. **119** (1960) 1743.

がきまる：

$$u = \pm e^{r/2a}\sqrt{\frac{r}{a}-1}\cosh\frac{x^0}{2a},$$

（複号同順）　（42.5）

$$v = \pm e^{r/2a}\sqrt{\frac{r}{a}-1}\sinh\frac{x^0}{2a}.$$

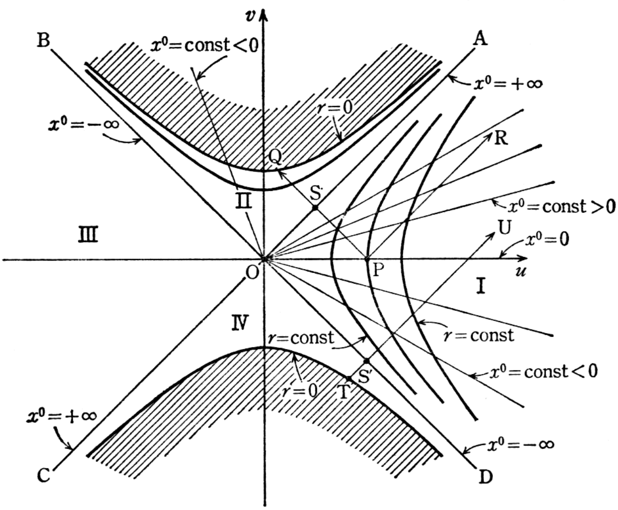
B）$r < a$ の場合

$$u = \pm e^{r/2a}\sqrt{1-\frac{r}{a}}\sinh\frac{x^0}{2a},$$

（複号同順）

$$v = \pm e^{r/2a}\sqrt{1-\frac{r}{a}}\cosh\frac{x^0}{2a}.$$

A), B）いずれの場合にも，2 組の答は u, v 平面のなかで原点 $u=v=0$ に対して対称な 1 対の点を示す.



第 14 図

第 14 図は (r, x^0) 系と (u, v) 系の対応を示す．そのうちで主な点や線の対応を下にならべてみよう．その前に，(u, v) 平面上で u 軸と 45° の傾きを

もつ2本の直線 AC, BD により全平面を4分したとき，∠AOD，∠COB をそれぞれ領域 I, III と呼ぼう．また，∠AOB，および ∠COD の斜線の引いてない部分をそれぞれ II および IV と呼ぶことにする．さて，両系の対応はつぎのようになる：

(r, x^0) 系	(u, v) 系
$r > a, \quad \infty > x^0 > -\infty$ の領域	I および III （ただし境界線を除く）
$0 < r < a, \quad \infty > x^0 > -\infty$ の領域	II および IV （斜線の部分と境界線を除く）
直線　$r =$ 一定 $> a$	I, III にある双曲線
直線　$r =$ 一定 $< a$	II, IV にある双曲線
半直線　$x^0 =$ 一定　$(r > a)$	O を通り，I, III 内にある直線 （原点 O を除く）
線分　$x^0 =$ 一定　$(0 < r < a)$	O を通り，II, IV 内にある線分 （原点 O を除く）
$r = a, \quad x^0 =$ 有限	原点　$u = v = 0$
$r = a, \quad x^0 = +\infty$	直線 AC　（原点 O を除く）
$r = a, \quad x^0 = -\infty$	直線 BD　（原点 O を除く）
$r = 0$	II, IV の境界をなす双曲線

さて，(u, v) 座標を用いて光の進路をかいてみよう．この場合のヌル測地線は θ, φ を一定にたもつと

$$(du)^2 - (dv)^2 = 0,$$

すなわち

$$v = \pm u + \text{const}$$

という2本の直線である．そこでいま，特異面 $r = a$ の外にある任意の1点 P から光が発射されたとする．光は第14図の直線 $\overrightarrow{PQ}$，および $\overrightarrow{PR}$ により表わされる．このうち $\overrightarrow{PQ}$ は特異面に向かう光線を示す．図からわかるように I の内部では v の増加する方向が t の増加の方向である．光は，t を用いるとき，∞ の時間をかけて特異面上の点 S に到達する．しかし (u, v) 系では有限の v が経過するにすぎない．(u, v) 系からみれば光は何の特異性にも出会わず，さらに内部 II に進み，有限の“時間” v をついやして最後に真の特異点 $r = 0$ に

到達する．ここで注意すべきはⅡの内部では光の進行につれて v は増加するが，t は逆に減少する．このことは既に前節でも述べた．

逆に，$r=0$ から発射された光を (u, v) 面上で図示するには領域Ⅱは不適当である．このときはⅡと同等な領域Ⅲの中で，$r=0$ を示す双曲線上の点Tから出発する光を調べればよい．特異面の内部では現象の進む向きは t の減少する向きであるから光は $\overrightarrow{\mathrm{TU}}$ の方向に進む．$t=-\infty$ になったとき光は特異面 $(r=a)$ 上の点 S′ に達する．そこからさらに外に出るにはまた無限に永い時間 t がかかる．したがって (u, v) 面では簡単に TU のように外にでることができるが，遠方にいる観測者からみれば，これを観測することはできない．彼にとっては，この光の発射は彼の時間のいわばうまれる以前のできごとだからである．

物質粒子の世界線は常に時間的接線ベクトルをもつから，(u, v) 系でも，たとえば P から出発した粒子の世界線は ∠RPS の内部にある．したがって，上に述べたことと同様のことが粒子の世界線についても成り立つ．

以上のように，Kruskal の座標系は Schwarzschild の特異面の近くの現象を記述するには便利なものである．しかし (r, x^0) 座標と異なり，$u\to\infty$ の遠方でもそれは Minkowski 型の座標系に近づかない．したがって，無限遠にいる人からみれば，これより (r, x^0) 系の方がはるかに便利であり，また時間や長さの定義を考えるとき，(r, x^0) の方がその物理的意味をつかみやすい．

§43.　荷電粒子のまわりの重力場

質量が m の1個の荷電粒子が座標原点に静止しているとして，そのまわりの電場および重力場のポテンシャルを求めてみよう．§36と同様に球対称で静的な場を考えよう．ds^2 としては，(36.3) と同様に

$$ds^2=-A(r)(dx^0)^2+\sum_{k=1}^{3}(dx^k)^2+B(r)\left(\sum_{k=1}^{3}x^k dx^k\right)^2 \qquad (43.1)$$

とおく．また，電磁場のポテンシャルは

$$A_0=-\frac{\phi(r)}{c}, \qquad A_k=0 \qquad k=1, 2, 3 \qquad (43.2)$$

とする．

この系の全作用積分は

$$I = \frac{1}{2c\kappa}\int\sqrt{-g}\; g^{\mu\nu}(\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\rho} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\sigma\rho})d^4x$$
$$-\frac{1}{4c\mu_0}\int\sqrt{-g}\; g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}f_{\mu\rho}f_{\nu\sigma}\,d^4x. \qquad (43.3)$$

この第1項は既に§36で計算してある．第2項を求めるためにまず $f_{\mu\nu}$ を計算する．これの0でない成分は

$$f_{0k} = \frac{1}{c}\partial_k\phi \qquad (k=1,\ 2,\ 3)$$

である．したがって，(43.3) は

$$I = -\frac{4\pi}{c\kappa}\int dx^0\int\left\{\left(1-\frac{1}{\psi^2}\right)\Delta' r - \frac{\varepsilon_0\kappa}{2}\frac{(\phi')^2}{\Delta}r^2\right\}dr \qquad (43.3)'$$

となる.* これの Δ, ψ, ϕ に対する Euler 方程式を求めればよい．結果は

$$\frac{\varepsilon_0\kappa}{2\Delta^2}r^2(\phi')^2 - \frac{d}{dr}\left\{\left(1-\frac{1}{\psi^2}\right)r\right\} = 0, \qquad (43.4)$$

$$\Delta' = 0, \qquad (43.5)$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\Delta}\phi'\right) = 0. \qquad (43.6)$$

さて，(43.5) から

$$\Delta = b = 一定. \qquad (43.5)'$$

また，(43.6) から

$$\phi' = \frac{\Delta}{r^2}\cdot\mathrm{const}.$$

これに (43.5)′ を代入すると

$$\phi' = \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (43.6)'$$

とおくことができる．α は積分定数である．これを (43.4) に代入すると

$$\left(1-\frac{1}{\psi^2}\right)r = \int\frac{\varepsilon_0\kappa}{2\Delta^2}\frac{\alpha^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2r^2}\,dr$$

---

* ′ はすべて r に関する微分を示す．

$$= -\frac{\kappa\alpha^2}{2(4\pi)^2 b^2 \varepsilon_0}\frac{1}{r} + a.$$

a は積分定数である．ところで $r\to\infty$ では $g_{\mu\nu}$ が $\eta_{\mu\nu}$ になるという条件をつけると

$$\lim_{r\to\infty} \varDelta \overset{d}{\equiv} \lim \sqrt{A(1+r^2B)} = 1$$

であるから，b は1となる．また，ϕ^2 は

$$\phi^2 \overset{d}{\equiv} 1 + r^2 B = \left(1 - \frac{a}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} \tag{43.7}$$

という形になる．したがって

$$A \overset{d}{\equiv} \frac{\varDelta^2}{1+r^2B} = \left(1 - \frac{a}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \tag{43.8}$$

となる．ここで

$$Q^2 = \frac{\kappa\alpha^2}{2(4\pi)^2\varepsilon_0} \tag{43.9}$$

である．

さて，Maxwell の方程式

$$\partial_\nu \boldsymbol{f}^{\lambda\nu} \overset{d}{\equiv} \partial_\nu\{\sqrt{-g}\; g^{\lambda\alpha}g^{\nu\beta}f_{\alpha\beta}\} = \mu_0 \boldsymbol{j}^\lambda \tag{43.10}$$

で $\lambda=0$ とおき，これを原点を中心とする半径 r の球の内部 V にわたり積分すると

$$\sum_{k=1}^{3}\int_V \partial_k \boldsymbol{f}^{0k}\, d^3x = \mu_0 \int_V \boldsymbol{j}^0\, d^3x.$$

左辺は Gauss の定理により球の表面 S 上の積分になる．また，右辺は V のなかにある全電荷の $\mu_0 c$ 倍である［(19.12) 参照］．そこで，原点に静止している粒子の電荷を q とすれば

$$\sum_{k=1}^{3}\int_S \sqrt{-g}\; g^{0\alpha}g^{k\beta}f_{\alpha\beta}\cdot d\sigma_k = \mu_0 cq.$$

$d\sigma_k$ は S 上の面積素片を示す3次元ベクトルである．ここで $r\to\infty$ とすれば $g_{\mu\nu}\to\eta_{\mu\nu}$ となるから

$$\text{左辺} = -\sum_{k=1}^{3}\int_S f_{0k}\, d\sigma_k = -\frac{1}{c}\sum_{k=1}^{3}\int \frac{x^k}{r}\phi'\, d\sigma_k.$$

これに (43.6)′ を代入すると

$$-\frac{4\pi}{c}\frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0}=c\mu_0 q$$

となる．したがって

$$\alpha=-q.$$

また

$$\phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{43.11}$$

となる． これは重力場が存在しない場合の静電ポテンシャルと全く同じである．

以上から ds^2 は

$$ds^2=-\left(1-\frac{a}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)(dx^0)^2+\left(1-\frac{a}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}(dr)^2 \\ +r^2\{(d\theta)^2+\sin^2\theta(d\varphi)^2\} \tag{43.12}$$

となる．ここで

$$Q^2=\frac{\kappa q^2}{2(4\pi)^2\varepsilon_0}=\frac{Gq^2}{4\pi\varepsilon_0 c^4}. \tag{43.13}$$

また $r\to\infty$ では，Newton のポテンシャル φ と g_{00} の間には

$$g_{00}\to -1+\frac{2Gm/c^2}{r}=-1-\frac{2}{c^2}\varphi$$

という関係が存在するから，積分定数 a は§36 と同様に

$$a=\frac{2Gm}{c^2} \tag{43.14}$$

となる．(43.12) は **Reissner-Weyl の解** とよばれる．

§44. 回転している物体の作る重力場，Kerr の解

いままでは原点に静止している球対称の物体の作る静的重力場について述べた．しかし現実の天体のように自転している物体のまわりの重力場を求めることは，永い間成功しなかった．この問題については Thirring や Lense の線形近似法による研究があったにすぎない．この問題の厳密解を求めることにはじ

めて成功したのは Kerr である.* この解は近頃，ブラック・ホールの問題とも関連して急に多くの人々の興味を引くに至った．そこでここにその解の求め方について述べる．なお本書の説明は Adler, Bazin, Schiffer の著書 "*Introduction to General Relativity*", McGraw-Hill, Inc. 1975 に負う所が多い.

(a) Einstein の方程式

まず，$g_{\mu\nu}$ を

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + al_\mu l_\nu \tag{44.a.1}$$

とおく．ここで $\eta_{\mu\nu}$ は Minkowski の計量で $-\eta_{00} = \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$ である．また，$l_\mu(x)$ は

$$\eta^{\mu\nu} l_\mu(x) l_\nu(x) = 0 \tag{44.a.2}$$

という条件を満たす量である．あるいは

$$l^\mu(x) \overset{d}{\equiv} \eta^{\mu\nu} l_\nu(x) \tag{44.a.3}$$

とおけば

$$l^\mu l_\mu = 0 \tag{44.a.2$'$}$$

が成り立つ．また，(44.a.1) の a は任意のパラメーターである．

l_μ のこの性質を使うと

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - al^\mu l^\nu \tag{44.a.4}$$

となる．さらに (44.a.2)$'$ から

$$l^\mu = g^{\mu\nu} l_\nu \tag{44.a.3$'$}$$

も成り立つ．

(44.a.1)，(44.a.4) から定義にしたがって $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ を作ると

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} l^\mu = +\frac{a}{2}\partial_\mu(l^\alpha l_\beta) l^\mu \tag{44.a.5}$$

となる．この結果を出すには，(44.a.2)$'$ を微分した関係式

$$\partial_\nu(l_\mu l^\mu) = 2l^\mu \partial_\nu l_\mu = 2l_\mu \partial_\nu l^\mu = 0 \tag{44.a.6}$$

を用いた．この関係式と (44.a.5) から

$$l_\mu \nabla_\lambda l^\mu = l^\mu \nabla_\lambda l_\mu = l^\mu(\partial_\lambda l_\mu - \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} l_\nu).$$

---

* R.P. Kerr: Phys. Rev. Letters **11** (1963) 237, R.P. Kerr and A. Schild: Proc. Symp. Appl. Math., American Math. Soc. **18** (1965) 199.

これに（44.a.5）を代入してかき直すと*

$$l_\mu \nabla_\lambda l^\mu = l^\mu \nabla_\lambda l_\mu = \frac{1}{2}\partial_\lambda (l^\mu l_\mu) = 0 \tag{44.a.7}$$

となる．

さて，$\det\{g_{\mu\nu}(x)\}$ を計算するために点 x において空間軸の回転を行う．なぜなら空間回転に対して $\det(g_{\mu\nu})$ は不変であるからである．そこで回転後の1点 x' における l_μ' の成分を

$$l_\mu' = \{l_0' = l_1' = l,\ l_2' = l_3' = 0\}$$

とする．このような l_μ' に対する $g_{\mu\nu}'(x')$ は（x' と x は同じ点である）

$$g_{\mu\nu}' = \begin{pmatrix} -1 + al^2 & al^2 & 0 & 0 \\ al^2 & 1 + al^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

そこで $g(x) = g'(x') = -1$ となる．すなわち，g はベクトル l_μ の成分の大きさや方向に無関係である．これを使うと

$$\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} = \partial_\mu \{\log\sqrt{-g}\} = 0.$$

そこで，物質のない領域における Einstein の方程式は

$$R_{\mu\nu} = -\partial_\lambda \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho}\Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} = 0 \tag{44.a.8}$$

となる．

さて，$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ の定義から $\Gamma^{\cdot}{}_{\cdot\cdot} = a^2 A + aB$ のような形であることがわかる．A, B は l や，l の1階微分からなる量で a には無関係である．これを（44.a.8）に代入すると $R_{\mu\nu} = a^4(\quad) + a^3(\quad) + a^2(\quad) + a(\quad)$ の形になる．（ ）はいずれも $l, \partial l/\partial x, \partial^2 l/\partial x \partial x$ の関数であるが，a には無関係である．a は任意のパラメーターであるから，（44.a.8）が成立するためには a の各べき（冪）の係数が0となる必要がある．それを以下にならべてかく．

a^1 の係数：

$$\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha \Gamma_{\beta,\mu\nu} = 0, \tag{44.a.9}$$

---

* l_μ は一般変換に対するベクトルではない．したがってそれの共変微分とは何をさすか不明である．ここでは $\nabla_\lambda l_\mu \overset{d}{\equiv} \partial_\lambda l_\mu - \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} l_\nu$ と定義する．$\nabla_\lambda l^\mu$ についても似たような扱いをする．

a^2 の係数：

$$2\partial_\alpha(l^\alpha l^\beta \Gamma_{\beta,\mu\nu}) + \frac{2}{a}\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}\Gamma_{\rho,\mu\beta}\Gamma_{\sigma,\nu\alpha} = 0, \tag{44.a.10}$$

a^3 の係数：

$$(l^\alpha l^\rho \eta^{\beta\sigma} + l^\beta l^\sigma \eta^{\alpha\rho})\Gamma_{\rho,\mu\beta}\Gamma_{\sigma,\nu\alpha} = 0, \tag{44.a.11}$$

a^4 の係数：

$$l^\alpha l^\rho l^\beta l^\sigma \Gamma_{\rho,\mu\beta}\Gamma_{\sigma,\nu\alpha} = 0. \tag{44.a.12}$$

以上 4 組の式が Einstein の方程式にほかならない．

さて，（44.a.12）の左辺は l_μ が（44.a.2）を満たすかぎり，どんなものでも恒等的に 0 となる．なぜならば，（44.a.5），（44.a.6）を使うと

$$\Gamma_{\rho,\mu\beta}l^\rho l^\beta = 0 \tag{44.a.13}$$

となるからである．

（44.a.11）は

$$l^\alpha l^\rho \eta^{\beta\sigma}(\Gamma_{\rho,\mu\beta}\Gamma_{\sigma,\nu\alpha} + \Gamma_{\rho,\nu\beta}\Gamma_{\sigma,\mu\alpha}) = 0$$

とかきかえることができる．この Γ を l を用いてかき表わし，さらに（44.a.2)′，（44.a.6）を使うと

$$l^\alpha\partial_\alpha l^\beta \cdot l^\rho\partial_\rho l_\beta \cdot l_\mu l_\nu = 0 \tag{44.a.14}$$

となる．あるいは

$$v^\beta \stackrel{d}{\equiv} l^\alpha\partial_\alpha l^\beta \tag{44.a.15}$$

とかくことにすれば

$$v_\lambda \stackrel{d}{\equiv} g_{\lambda\beta}v^\beta = \eta_{\lambda\beta}v^\beta = l^\alpha\partial_\alpha l_\lambda$$

となる．したがって，（44.a.14）は

$$(v^\beta v_\beta)l_\mu l_\nu = 0$$

となる．つまり

$$(v_\beta v^\beta) = 0 \tag{44.a.16}$$

が成立する．

v^α はさらに l_α とも直交する．すなわち，（44.a.6）により

$$v^\alpha l_\alpha = l^\mu\partial_\mu l^\alpha \cdot l_\alpha = 0. \tag{44.a.17}$$

いま，

$$l^\alpha=(l^0,\ \vec{l}),\qquad v^\alpha=(v^0,\ \vec{v})$$

とおけば，(44.a.2) および (44.a.16) から

$$|l^0|=|\vec{l}|,\qquad |v^0|=|\vec{v}|$$

である．さらに (44.a.17) から

$$v^\alpha l_\alpha=-v^0l^0+(\vec{l}\cdot\vec{v})=0.$$

あるいは $\vec{l}$ と $\vec{v}$ の間の角を θ とすると

$$v^0l^0=|l^0|\cdot|v^0|\cos\theta.$$

したがって l^0 と v^0 が同符号ならば $\theta=0$，異符号なら π である．つまり4元ベクトルとして l^μ と v^μ は平行である．そこで

$$l^\mu\partial_\mu l^\alpha\overset{d}{\equiv}v^\alpha\overset{d}{\equiv}-A(x)l^\alpha \tag{44.a.18}$$

とおくことができる．もし $l_\mu(x)$ がわかっていれば，$A(x)$ はそれを用いてかき表わされる．(44.a.18) が (44.a.11) から導かれる結論である．

つぎに (44.a.9) を l を用いて具体的にかくと

$$\partial_\alpha(l_\mu\partial_\nu l^\alpha+l^\alpha\partial_\nu l_\mu)+\partial_\alpha(l^\alpha\partial_\mu l_\nu+l_\nu\partial_\mu l^\alpha)-\Box(l_\mu l_\nu)=0$$

となる．$\Box$ とは $\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ のことである．

いま，

$$\nabla_\alpha l^\alpha\overset{d}{\equiv}\partial_\alpha l^\alpha+\Gamma^\alpha{}_{\alpha\beta}l^\beta=\partial_\alpha l^\alpha\overset{d}{\equiv}-L \tag{44.a.19}$$

とおけば，上の式は

$$-\partial_\nu(Ll_\mu)-\partial_\mu(Ll_\nu)+\partial_\mu v_\nu+\partial_\nu v_\mu-\Box(l_\mu l_\nu)=0$$

となる．(44.a.18) を代入すると

$$-\Box(l_\mu l_\nu)=\partial_\mu\{(L+A)l_\nu\}+\partial_\nu\{(L+A)l_\mu\} \tag{44.a.20}$$

となる．

最後に，l_μ が (44.a.20) を満足するならば，そのような l_μ は (44.a.10) をも満たすことが証明できる．したがって (44.a.10) は不要となる．このことを次に証明しよう．

まず (44.a.10) を l を用いて具体的にかいてみよう．$\partial l/\partial x^\alpha$ を $l_{,\alpha}$ で表わ

すことにすると

$$-l^\alpha l^\beta(l_\mu l_\nu)_{,\alpha\beta}-(l^\alpha l^\beta)_{,\alpha}(l_\mu l_\nu)_{,\beta}+l_\mu l_\nu l^{\alpha,\beta}(l_{\beta,\alpha}-l_{\alpha,\beta})$$
$$+(l_\mu l_{\nu,\alpha}+l_\nu l_{\mu,\alpha})l^\beta l^\alpha{}_{,\beta}+l_{\mu,\alpha}l_{\nu,\beta}l^\alpha l^\beta=0. \quad (44.\mathrm{a}.10)'$$

はじめの２項をまとめると，v_μ の定義を用いて

$$l_\mu l_\nu(-2AL-4A^2+2l^\alpha A_{,\alpha})$$

となる．また (44.a.10)′ の第４項は v_α の定義を使うと

$$2A^2 l_\mu l_\nu$$

となる．最後の項は $A^2 l_\mu l_\nu$ に等しい．そこで，結局 (44.a.10)′ は

$$l_\mu l_\nu\{-AL-A^2+l^\alpha(A+L)_{,\alpha}+l^\alpha\Box l_\alpha\}=0 \qquad (44.\mathrm{a}.10)''$$

となる．

ところで (44.a.20) に l^ν を掛けると，(44.a.2)，(44.a.6) から

$$\text{左辺}=-l^\nu\Box(l_\mu l_\nu)=-l_\mu l^\nu\Box l_\nu,$$
$$\text{右辺}=l_\mu\{l^\nu(L+A)_{,\nu}-A(L+A)\}.$$

したがって (44.a.20) から

$$-l^\nu\Box l_\nu=l^\nu(L+A)_{,\nu}-A(L+A) \qquad (44.\mathrm{a}.20)'$$

が導かれる．これを使うと (44.a.10)″ は自動的に成立する．

結局 Einstein の方程式を解くには (44.a.20) だけを解けばよい．ただし，その式の中にでてきた L, A は

$$L\overset{d}{\equiv}-l^\alpha{}_{,\alpha}, \qquad (44.\mathrm{a}.19)$$
$$-Al^\alpha\overset{d}{\equiv}v^\alpha\overset{d}{\equiv}l^\mu\partial_\mu l^\alpha \qquad (44.\mathrm{a}.18)$$

である．

(b) 定常時空の場合

いままでは $l_\mu(x)$ に対して (44.a.2) 以外は何らの特別な制限を設けなかった．これから定常な場合について考えよう．つまり l_μ は x^0 に無関係とする．

まず，(44.a.2) から

$$l_\mu=(l_0(x),\ l_0\vec{\lambda}(x)) \qquad (44.\mathrm{b}.1)$$

とおく．ただし

$$(\vec{\lambda})^2 = 1$$

である．

解くべき方程式（44.a.20）の（0, 0）成分は

$$-\Box\{(l_0)^2\} = 2\partial_0\{(L+A)l_0\}.$$

しかし定常条件のために時間微分はすべて0となるから

$$\Delta\{(l_0)^2\} = 0. \tag{44.b.2}$$

つぎに，$\mu=0$，ν の代りに $j(=1, 2, 3)$ とおくと

$$-\Delta\{\lambda_j(l_0)^2\} = \partial_j\{(L+A)l_0\}. \tag{44.b.3}$$

最後に $i, j = 1, 2, 3$ に対して*

$$-\Delta\{(l_0)^2\lambda_i\lambda_j\} = \partial_i\{(L+A)l_0\lambda_j\} + \partial_j\{(L+A)l_0\lambda_i\}. \tag{44.b.4}$$

ここで

$$L = -l^j{}_{,j} = -\partial_j(l_0\lambda_j), \tag{44.b.5}$$
$$Al_0 = -l^k\partial_k l_0 = -l_0\lambda_k\partial_k l_0,$$

すなわち

$$A = -\lambda_k\partial_k l_0 \tag{44.b.6}$$

である．

さて，（44.b.2）を使うと（44.b.3）は

$$(l_0)^2\Delta\lambda_j + 2\partial_k\lambda_j\cdot\partial_k\{(l_0)^2\} = -\partial_j\{l_0(L+A)\}. \tag{44.b.3$'$}$$

また（44.b.4）の左辺に（44.b.3）を代入し，その結果にさらに（44.b.3)′を使うと

$$2(l_0)^2\lambda_{i,k}\lambda_{j,k} = -l_0(L+A)(\lambda_{i,j}+\lambda_{j,i}),$$

あるいは

$$\lambda_{i,j}+\lambda_{j,i} = \frac{1}{p}\lambda_{i,k}\lambda_{j,k} \tag{44.b.7}$$

となる．ここで

$$2l_0p \overset{d}{\equiv} -(L+A) = (l_0\lambda_j)_{,j} + \lambda_k l_{0,k}.$$

---

* ここでもラテン文字は 1, 2, 3 を示す．また，同じラテン文字が同一の項の中に2回でてきたときは1から3までの和をとるものとする．

あるいは，3次元ベクトル記号でかくと

$$2l_0 p = 2\vec{\lambda}\,\mathrm{grad}\,l_0 + l_0\,\mathrm{div}\,\vec{\lambda} \qquad (44.b.8)$$

となる．以上で，l_0 と $\vec{\lambda}$ をきめる方程式は（44.b.2），（44.b.3）および（44.b.7）である．

なお

$$g_{00} = \eta_{00} - \frac{2\varphi}{c^2} \qquad \varphi:\ \text{Newton のポテンシャル}$$

とおけば，（44.a.1）から

$$(l_0)^2 = -\frac{2}{ac^2}\varphi.$$

したがって（44.b.2）は物質のない場所における Poisson の式

$$\Delta\varphi = 0$$

に相当する．

さて $\vec{\lambda}$ は

$$\lambda_i\lambda_i = 1$$

であるから

$$\lambda_i\lambda_{i,k} = 0. \qquad (44.b.9)$$

そこで（44.b.7）に λ_j を掛けると

$$\lambda_j\lambda_{i,j} = 0 \qquad (44.b.10)$$

となる．

ここで3×3マトリックス $\boldsymbol{M}$ の (i, j) 要素を

$$(\boldsymbol{M})_{ij} \overset{d}{\equiv} \lambda_{i,j} \qquad (44.b.11)$$

と定義すれば，（44.b.7）は

$$(\boldsymbol{M})_{ij} + (\boldsymbol{M})_{ji} = \frac{1}{p}(\boldsymbol{M})_{ik}(\boldsymbol{M})_{jk},$$

あるいは

$$(\boldsymbol{M}^T + \boldsymbol{M})_{ij} = \frac{1}{p}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^T)_{ij} \qquad (44.b.7)'$$

となる．$\boldsymbol{M}^T$ は $\boldsymbol{M}$ の転位行列である．いま，

$$\boldsymbol{\lambda}^T = (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3), \qquad \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

とかくことにすれば，(44.b.9) は

$$\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{M} = 0,$$

または全体の転位をとると

$$\boldsymbol{M}^T \boldsymbol{\lambda} = 0. \tag{44.b.9$'$}$$

同様に (44.b.10) は

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{\lambda} = 0. \tag{44.b.10$'$}$$

そこで，これから (44.b.7)$'$, (44.b.9)$'$, (44.b.10)$'$ から $\boldsymbol{M}$ を $\boldsymbol{\lambda}$ の関数として求めてみよう．まず1点 x において，空間座標系を直交回転して

$$\vec{\lambda}(x) \to \vec{\lambda}'(x) = (1,\ 0,\ 0)$$

となるようにする．この回転の行列を $\boldsymbol{R}$ とすれば

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{R}$ は直交行列であるから

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R} = \boldsymbol{1}.$$

したがって

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{R}^T \boldsymbol{\lambda}'.$$

そこで (44.b.10)$'$ は

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{\lambda}' = 0,$$

あるいは

$$\boldsymbol{M}' \overset{d}{\equiv} \boldsymbol{R}\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}^T \tag{44.b.12}$$

とおけば

$$\boldsymbol{M}' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{44.b.10$''$}$$

となる．

　同様に，(44.b.9)′ から

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{\lambda}' = 0,$$

あるいは

$$(\boldsymbol{M}')^T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 0. \qquad (44.\mathrm{b}.9)''$$

(44.b.9)″，(44.b.10)″ から

$$\boldsymbol{M}' = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & c & d\\ 0 & e & f\end{pmatrix} \overset{d}{\equiv} \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{N}'}\end{pmatrix}$$

という形をしていることがわかる．$\boldsymbol{N}'$ は 2 × 2 行列である．したがって

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{M}'\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^T\begin{pmatrix}0 & \\ & \boldsymbol{N}'\end{pmatrix}\boldsymbol{R}.$$

　ところで，(44.b.7)′ に左から $\boldsymbol{R}$，右から $\boldsymbol{R}^T$ を掛けると

$$(\boldsymbol{M}')^T + \boldsymbol{M}' = \frac{1}{p}\boldsymbol{M}'(\boldsymbol{M}')^T,$$

あるいは 2 行 2 列の部分行列でかくと

$$(\boldsymbol{N}')^T + \boldsymbol{N}' = \frac{1}{p}\boldsymbol{N}'(\boldsymbol{N}')^T \qquad (44.\mathrm{b}.13)$$

となる．

　いま，2 × 2 行列 $\boldsymbol{U}$ を

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{1}_2 - \frac{1}{p}\boldsymbol{N}' \qquad (44.\mathrm{b}.14)$$

と定義する．$\boldsymbol{1}_2$ は 2 行 2 列の単位行列である． この $\boldsymbol{U}$ は直交行列である．なぜならば

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^T = \left(\boldsymbol{1}_2 - \frac{1}{p}\boldsymbol{N}'\right)\left(\boldsymbol{1}_2 - \frac{1}{p}\boldsymbol{N}'^T\right) = \boldsymbol{1}_2 - \frac{1}{p}(\boldsymbol{N}' + \boldsymbol{N}'^T) + \frac{1}{p^2}\boldsymbol{N}'\boldsymbol{N}'^T.$$

(44.b.13) を使うと

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^T = \boldsymbol{1}_2$$

となる．したがって

$$\boldsymbol{U}^T = \boldsymbol{U}^{-1}, \qquad \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U} = \boldsymbol{1}_2$$

も成立する．そこで

$$(\boldsymbol{N}')^T + \boldsymbol{N}' = \frac{1}{p}(\boldsymbol{N}')^T\boldsymbol{N}' \qquad (44.\text{b}.13)'$$

も成立する．

$\boldsymbol{U}$ の定義式 (44.b.14) で，もし $\boldsymbol{N}' \to 0$ とすれば $\boldsymbol{U} \to \boldsymbol{1}_2$ となることを考えると，2次元の直交行列としては

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

だけである．θ は $\vec{x}$ の或る関数である．そこで，$\boldsymbol{N}'$ は

$$\boldsymbol{N}' = p(\boldsymbol{1}_2 - \boldsymbol{U}) = p\begin{pmatrix} 1-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix}. \qquad (44.\text{b}.15)$$

したがって

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{R}^T\begin{pmatrix} 0 & \\ & \boldsymbol{N}' \end{pmatrix}\boldsymbol{R}.$$

これを要素でかくと，$i, k = 1, 2, 3$ に対して

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{M})_{ik} &= \sum_{j,\,l=2}^{3}(R^T)_{ij}(N')_{jl}R_{lk} \\ &= p(1-\cos\theta)\sum_{j=2}^{3}R_{ji}R_{jk} + p\sin\theta(R_{2i}R_{3k} - R_{3i}R_{2k})\end{aligned} \qquad (44.\text{b}.16)$$

となる．

ところで，$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{\lambda}'$ であるから

$$\lambda_i = (R^T)_{i1} = R_{1i}.$$

したがって

$$\sum_{j=2}^{3}R_{ji}R_{jk} = \sum_{j=1}^{3}(R^T)_{ij}R_{jk} - R_{1i}R_{1k} = \delta_{ik} - \lambda_i\lambda_k. \qquad (44.\text{b}.17)$$

また，$\det(\boldsymbol{R})=1$ であるから

$$\epsilon_{ijk}=\begin{cases}1: & (i,\ j,\ k)\to(1,\ 2,\ 3)\ \text{が偶置換のとき}\\ -1: & (i,\ j,\ k)\to(1,\ 2,\ 3)\ \text{が奇置換のとき}\\ 0: & \text{その他の場合}\end{cases}$$

を使うと

$$1=\epsilon_{ijk}R_{1i}R_{2j}R_{3k},$$

あるいは

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk}&=\epsilon_{abc}R_{ai}R_{bj}R_{ck}\\&=\lambda_i(R_{2j}R_{3k}-R_{3j}R_{2k})+\lambda_j(R_{2k}R_{3i}-R_{3k}R_{2i})\\&\qquad+\lambda_k(R_{2i}R_{3j}-R_{3i}R_{2j}).\end{aligned}$$

ところで，$\boldsymbol{R\lambda}=\boldsymbol{\lambda}'$ から

$$R_{1k}\lambda_k=\lambda_k\lambda_k=1,\qquad R_{2k}\lambda_k=0,\qquad R_{3k}\lambda_k=0$$

であるから，上の ϵ_{ijk} に λ_k を掛けると

$$\epsilon_{ijk}\lambda_k=R_{2i}R_{3j}-R_{3i}R_{2j}. \tag{44.b.18}$$

(44.b.17), (44.b.18) を使うと (44.b.16) は

$$M_{ik}=p(1-\cos\theta)(\delta_{ik}-\lambda_i\lambda_k)+p\sin\theta\,\epsilon_{ikl}\lambda_l \qquad (44.\text{b}.16)'$$

となる．あるいは $p,\ \theta$ の代りに

$$\alpha\overset{d}{\equiv}p(1-\cos\theta),\qquad \beta\overset{d}{\equiv}p\sin\theta \tag{44.b.19}$$

とおけば（注意：$p,\ \theta$ はともに $\vec{x}$ の関数であるから，$\alpha,\ \beta$ も $\vec{x}$ の関数である）

$$M_{ik}\overset{d}{\equiv}\lambda_{i,k}=\alpha(\delta_{ik}-\lambda_i\lambda_k)+\beta\epsilon_{ikl}\lambda_l. \tag{44.b.20}$$

$i,\ k$ を縮約すれば

$$\operatorname{div}\vec{\lambda}=2\alpha. \tag{44.b.21}$$

また

$$\lambda_{i,k}-\lambda_{k,i}=2\beta\epsilon_{ikl}\lambda_l.$$

ベクトル記号を使うと

$$\operatorname{rot}\vec{\lambda}=-2\beta\vec{\lambda}. \tag{44.b.22}$$

また (44.b.20) に ∂_k を掛け，さらに (44.b.22) を使うと，ベクトル記号

を使ってかくとき

$$\Delta\vec{\lambda} = \operatorname{grad}\alpha - \vec{\lambda}(\vec{\lambda}\cdot\operatorname{grad}\alpha) - 2(\alpha^2+\beta^2)\vec{\lambda} - \vec{\lambda}\times\operatorname{grad}\beta \tag{44.b.23}$$

となる．

一方，(44.b.22) から

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{\lambda}) = -2\operatorname{rot}(\beta\vec{\lambda}).$$

これに (44.b.21)，(44.b.22) を代入すると

$$\Delta\vec{\lambda} = 2\operatorname{grad}\alpha - 2\vec{\lambda}\times\operatorname{grad}\beta - 4\beta^2\vec{\lambda}. \tag{44.b.24}$$

(44.b.23) と比べることにより

$$\operatorname{grad}\alpha = \vec{\lambda}\times\operatorname{grad}\beta - \vec{\lambda}(\vec{\lambda}\cdot\operatorname{grad}\alpha) - 2(\alpha^2-\beta^2)\vec{\lambda}. \tag{44.b.25}$$

これと $\vec{\lambda}$ との内積を作ると

$$(\vec{\lambda}\cdot\operatorname{grad}\alpha) = \beta^2 - \alpha^2. \tag{44.b.26}$$

したがって，(44.b.25) は

$$\operatorname{grad}\alpha = \vec{\lambda}\times\operatorname{grad}\beta - (\alpha^2-\beta^2)\vec{\lambda} \tag*{(44.b.25)$'$}$$

となる．

つぎに，(44.b.22) の div を求めると

$$\operatorname{div}(\beta\vec{\lambda}) = 0$$

となる．(44.b.21) を代入すると

$$(\vec{\lambda}\cdot\operatorname{grad}\beta) = -2\alpha\beta. \tag{44.b.27}$$

また (44.b.25)$'$ と $\vec{\lambda}$ のベクトル積を作ると，少しかき直しをすれば

$$\operatorname{grad}\beta = -(\vec{\lambda}\times\operatorname{grad}\alpha) - 2\alpha\beta\vec{\lambda}. \tag{44.b.28}$$

以上をまとめると

$$\operatorname{grad}\alpha = \vec{\lambda}\times\operatorname{grad}\beta - (\alpha^2-\beta^2)\vec{\lambda}, \tag*{(44.b.25)$'$}$$

$$\operatorname{grad}\beta = -\vec{\lambda}\times\operatorname{grad}\alpha - 2\alpha\beta\vec{\lambda}, \tag{44.b.28}$$

$$(\vec{\lambda}\cdot\operatorname{grad}\alpha) = -(\alpha^2-\beta^2), \tag{44.b.26}$$

$$(\vec{\lambda}\cdot\operatorname{grad}\beta) = -2\alpha\beta \tag{44.b.27}$$

となる．

ここで

$$\gamma(x) \overset{d}{\equiv} \alpha + i\beta$$

という複素関数を導入すると，(44.b.25)′ + i(44.b.28) から

$$\mathrm{grad}\,\gamma = -i\vec{\lambda} \times \mathrm{grad}\,\gamma - \gamma^2\vec{\lambda} \tag{44.b.29}$$

となる．また，(44.b.26)，(44.b.27) は

$$(\vec{\lambda}\cdot\mathrm{grad}\,\gamma) = -\gamma^2 \tag{44.b.30}$$

にほかならない．

(44.b.29) の両辺の div をとり，(44.b.21)，(44.b.22)，(44.b.30) を使うと，

$$\Delta\gamma = 0 \tag{44.b.31}$$

が導かれる．また，(44.b.29) の 2 乗を計算すると

$$(\mathrm{grad}\,\gamma)^2 = \gamma^4 \tag{44.b.32}$$

となる．ここで

$$\omega \overset{d}{\equiv} \frac{1}{\gamma} \tag{44.b.33}$$

とおけば，(44.b.32) は

$$(\mathrm{grad}\,\omega)^2 = 1 \tag*{(44.b.32)′}$$

となる．そこで (44.b.31) により $\gamma = \alpha + i\beta$ をきめ，その大きさを (44.b.32)′ により規格化すれば，この α, β を用いて，$\vec{\lambda}$ が以下のようにきまる．

まず，(44.b.29) を $-\gamma^2$ で割ると

$$\mathrm{grad}\,\omega = -i\vec{\lambda} \times \mathrm{grad}\,\omega + \vec{\lambda}. \tag*{(44.b.29)′}$$

したがって

$$(\vec{\lambda}\cdot\mathrm{grad}\,\omega) = 1. \tag*{(44.b.30)′}$$

複素共役をとると

$$(\vec{\lambda}\cdot\mathrm{grad}\,\omega^*) = 1. \tag*{(44.b.30)*}$$

また

$$\mathrm{grad}\,\omega \times \mathrm{grad}\,\omega^* = B\vec{\lambda} - i(\mathrm{grad}\,\omega + \mathrm{grad}\,\omega^*) \qquad (44.\mathrm{b}.34)$$

となる．ここで

$$B \overset{d}{\equiv} 2i - \{\mathrm{grad}\,\omega^* \cdot (\mathrm{grad}\,\omega \times \vec{\lambda})\}$$

である．(44.b.34) と $\mathrm{grad}\,\omega$ との内積をつくると (44.b.32)′, (44.b.30)′ から

$$B = i(1 + \mathrm{grad}\,\omega \cdot \mathrm{grad}\,\omega^*). \qquad (44.\mathrm{b}.35)$$

これを (44.b.34) に代入すると

$$\vec{\lambda} = \frac{1}{B}\{\mathrm{grad}\,\omega \times \mathrm{grad}\,\omega^* + i(\mathrm{grad}\,\omega + \mathrm{grad}\,\omega^*)\}$$

$$= \frac{\mathrm{grad}\,\omega + \mathrm{grad}\,\omega^* - i\,\mathrm{grad}\,\omega \times \mathrm{grad}\,\omega^*}{1 + (\mathrm{grad}\,\omega \cdot \mathrm{grad}\,\omega^*)}. \qquad (44.\mathrm{b}.36)$$

そこで，γ あるいはその逆数 ω さえわかれば $\vec{\lambda}$ がきまる．

最後に残ったことは l_0 を α, β からきめるという仕事である．まず，まだ使ってない式は

$$\Delta(l_0{}^2) = 0 \qquad (44.\mathrm{b}.2)$$

および

$$\Delta(l_0{}^2\lambda_j) = -\partial_j\{l_0(L + A)\} \qquad (44.\mathrm{b}.3)$$

である．これらの解で，さらに (44.b.4) と矛盾しない答は

$$(l_0{}^2) = C\mathrm{Re}(\gamma) = C\alpha \qquad (44.\mathrm{b}.37)$$

である．Re は実数部を示す．C は任意の定数である．

これが解であることをまず示そう．その後で解の唯一性を証明すれば，それで十分である．

［証　明］ $\Delta\gamma = 0$ であるから $\Delta\alpha = 0$. したがって(44.b.2)は満たされている．

つぎに (44.b.3) の左辺に $C\alpha$ を代入すると

$$\text{左辺} = C\Delta(\alpha\lambda_j)$$

$$= C\alpha\Delta\lambda_j + 2C\partial_k\alpha\partial_k\lambda_j.$$

ところで，(44.b.20)，(44.b.24) を使い，さらに

$$(\mathrm{grad}\,\omega)^2 = 1 \qquad (44.\mathrm{b}.3)'$$

から導かれる関係式

$$\left.\begin{aligned} \alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4 &= (\mathrm{grad}\,\alpha)^2 - (\mathrm{grad}\,\beta)^2 \\ 2\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2) &= (\mathrm{grad}\,\alpha \cdot \mathrm{grad}\,\beta) \end{aligned}\right\} \qquad (44.\mathrm{b}.32)''$$

を使うと，面倒な計算ののちに

$$(44.\mathrm{b}.3)\text{の左辺} = C\partial_j(\alpha^2 + \beta^2) \qquad (44.\mathrm{b}.38)$$

となる．

つぎに (44.b.3) の右辺は，(44.b.5)，(44.b.6) を使うと

$$-\partial_j\{l_0(L + A)\} = \partial_j\partial_k(l_0{}^2\lambda_k) = C\partial_j\partial_k(\alpha\lambda_k).$$

これに (44.b.21)，(44.b.26) を代入すると (44.b.38) と一致する．したがって $(l^0)^2 = C\alpha$ は (44.b.3) を満足する．

これで解は完全に求まったことになる．$(l^0)^2$ の解にでてきた未定の定数 C はパラメーター a に含ませることができる．すなわち aC をあらためて a とおくことにすれば C は不必要となる．

いままでに述べたことをまとめると

$$\Delta\gamma = 0$$

を満足し $\{\mathrm{grad}(1/\gamma)\}^2 = 1$ に規格化された $\gamma = \alpha + i\beta$ を用いると，$g_{\mu\nu}$ を

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + a l_\mu l_\nu,$$

$$l_\mu = l_0(1,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3),$$

$$(\vec{\lambda})^2 = 1$$

のようにかくとき，l_0 は

$$(l_0)^2 = \mathrm{Re}(\gamma) = \alpha.$$

また $\vec{\lambda}$ は (44.b.36) で与えられる．ただし $\omega = 1/\gamma$ である．これを α, β でかき直すと

$$\vec{\lambda} = \frac{(\beta^2 - \alpha^2)\mathrm{grad}\,\alpha - 2\alpha\beta\,\mathrm{grad}\,\beta - \mathrm{grad}\,\alpha \times \mathrm{grad}\,\beta}{(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (\mathrm{grad}\,\beta)^2} \qquad (44.\mathrm{b}.36)'$$

となる．

最後に $(l_0)^2 = C\alpha$ が唯一の解であることを証明しよう．いま，空間の或る

領域の表面上における $(l_0)^2$ の境界値が与えられているものとする．また $\gamma=\alpha+i\beta$ は既にわかっているものとする．したがって $\vec{\lambda}$ も既知量である．そこで $(l_0)^2$ が満たすべき式は

$$\Delta(l_0{}^2)=0, \tag{44.b.2}$$

$$\Delta(l_0{}^2\lambda_j)=\partial_j\partial_k(l_0{}^2\lambda_k), \tag{44.b.3}$$

$$\Delta(l_0{}^2\lambda_i\lambda_j)=\partial_i\{\lambda_j\partial_k(l_0{}^2\lambda_k)\}+\partial_j\{\lambda_i\partial_k(l_0{}^2\lambda_k)\} \tag{44.b.4}$$

である．この中で最後の式は λ_i を決定するのに使われた．すなわち $(l_0)^2$ が (44.b.2), (44.b.3) を満足するかぎり，それがどのようなものであろうとも最後の方程式から $\lambda_{i,k}$ は (44.b.7) という形の式を満足する．したがってそれから求まる λ_i は必ず (44.b.36)′ の形になる．それゆえ (44.b.4) から求まる λ_i に対して (44.b.2), (44.b.3) を満たす $(l_0)^2$ が1通りしかないことを示せばよい．いまそのような解が2個あるとして，これを $l_{0(1)}$, $l_{0(2)}$ とする．その差を

$$\varphi\equiv(l_{0(1)})^2-(l_{0(2)})^2$$

とおく．2つの解は同じ境界条件を満足しているから境界では $\varphi=0$ である．

(44.b.2), (44.b.3) を $l_{0(1)}$, $l_{0(2)}$ に対してかき，(1) と (2) の差を求めると

$$\Delta\varphi=0, \qquad \Delta(\varphi\lambda_j)=\partial_j\partial_k(\varphi\lambda_k) \tag{44.b.39}$$

となる．ところで (44.b.39) の解で，$\varphi=0$ という境界条件を満足する φ は $\varphi\equiv0$ しかない．これで解の一意性も証明された．

(c) Schwarzschild の解

これから，方程式

$$\Delta\gamma=0 \tag{44.c.1}$$

ならびに規格化条件

$$(\mathrm{grad}\,\omega)^2=1 \tag{44.c.2}$$

を満たす解を求めてみよう．この特解としては

$$\gamma=\alpha=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad \beta=0 \tag{44.c.3}$$

がある．

$$\mathrm{grad}\,\omega = \mathrm{grad}(r) = \frac{\vec{x}}{r} = \mathrm{grad}\,\omega^*$$

であるから，確かに（44.c.2）も満たされている．

この解を用いると，（44.b.36），（44.b.37）から

$$\vec{\lambda} = \frac{x}{r}, \qquad (l_0)^2 = \frac{1}{r}. \tag{44.c.4}$$

したがって

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + \sum_{k=1}^{3}(dx^k)^2 + \frac{a}{r}\left(dx^0 + \sum_{k=1}^{3}\frac{x^k dx^k}{r}\right)^2 \tag{44.c.5}$$

となる．

これは

$$ds^2 = -\left(1-\frac{a}{r}\right)\left(dx^0 + \frac{a}{r-a}dr\right)^2 + \left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1}(dr)^2 + r^2\{(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2\}$$

のようにかきかえられる．そこで

$$x^{0\prime} = x^0 + a\log\left|\frac{r}{a}-1\right|, \qquad r' = r,\ \ \theta' = \theta,\ \ \varphi' = \varphi \tag{44.c.6}$$

で定義された新座標系（$x^{0\prime}$, r', θ', φ'）に移れば

$$ds^2 = -\left(1-\frac{a}{r'}\right)(dx^{0\prime})^2 + \left(1-\frac{a}{r'}\right)^{-1}(dr')^2 + (r')^2\{(d\theta')^2 + \sin^2\theta'(d\varphi')^2\} \tag{44.c.7}$$

となる．これは Schwarzschild の解にほかならない．

（d） Kerr の解

（44.c.3）を少し一般化して

$$\gamma = \{(\vec{x}-\vec{a})^2\}^{-1/2}$$

とおく．$\vec{a}$ が実数ならば，これは重力場の中心が座標原点ではなく，点 $\vec{a}$ にある場合の Schwarzschild の解に相当する．したがってこれは原点の移動にすぎず，本質的にはなんら新しい解ではない．しかし $\vec{a}$ が複素数の成分をもつとき

は事情は異なる.

いま，ベクトル $\vec{a}$ として

$$\vec{a} = (0,\ 0,\ ih) \qquad h = \text{実数} \tag{44.d.1}$$

とおく．したがって

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\{x^2 + y^2 + (z - ih)^2\}^{1/2}} \\ &= \frac{1}{\{x^2 + y^2 + z^2 - h^2 - 2ihz\}^{1/2}}. \end{aligned} \tag{44.d.2}$$

そこで

$$\omega = \{x^2 + y^2 + z^2 - h^2 - 2ihz\}^{1/2} \overset{d}{\equiv} \rho + i\sigma \tag{44.d.3}$$

とおく．あるいは

$$\left.\begin{aligned} &\rho^2 - \sigma^2 = r^2 - h^2 \\ &\rho\sigma = -zh \\ &r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}\right\} \tag{44.d.4}$$

(44.d.3) から $r \gg h$ では $\rho \approx r$ となる．ρ, σ を使うと

$$\gamma = \frac{\rho - i\sigma}{\rho^2 + \sigma^2}.$$

したがって

$$\alpha = (l_0)^2 = \frac{\rho}{\rho^2 + \sigma^2} = \frac{\rho^3}{\rho^4 + (zh)^2}. \tag{44.d.5}$$

$\vec{\lambda}$ を求めるためには grad ω を計算すればよい．これは (44.d.3) から容易に求まる：

$$\operatorname{grad}\omega = \frac{\vec{x} - ih\vec{k}}{\omega}. \tag{44.d.6}$$

ここで $\vec{k}$ は z 軸の正の向きを指す単位ベクトルである．そこで，(44.b.36) から

$$\lambda = \frac{2\{\rho\vec{x} - h\sigma\vec{k} + h(\vec{x} \times \vec{k})\}}{|\omega|^2 + r^2 + h^2}, \tag{44.d.7}$$

あるいは成分に分けてかくと

$$\lambda_1 = \frac{\rho x + hy}{\rho^2 + h^2}, \qquad \lambda_2 = \frac{\rho y - hx}{\rho^2 + h^2}, \qquad \lambda_3 = \frac{z}{\rho}. \quad (44.\mathrm{d}.8)$$

これを使うと

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (d\vec{x})^2 + \frac{a\rho^3}{\rho^4 + (hz)^2}\left\{dx^0 + \frac{\rho(xdx + ydy)}{\rho^2 + h^2} + \frac{h(ydx - xdy)}{\rho^2 + a^2} + \frac{zdz}{\rho}\right\}^2. \quad (44.\mathrm{d}.9)$$

これが **Kerr の解** の ds^2 である．ここで念のため ρ と r の関係をかくと

$$\rho^2 = \frac{r^2 - h^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{r^2 - h^2}{2}\right)^2 + (hz)^2} \qquad (44.\mathrm{d}.10)$$

である．そこで $r \gg h$ のときは，既に指摘したように $\rho \approx r$ となる．また (44.d.9) の h を無視すれば，(44.d.9) は (44.c.5) と一致する．したがって座標原点から十分に離れた地点では Kerr の解で表わされた時空は Schwarzschild の解のそれと漸近的に同じものとなる．

(e) 他の座標系を用いた場合の Kerr の解

Kerr の解の物理的意味を明らかにするために，(44.d.9) よりもわかりやすい形になるよう座標系をとりかえてみよう．

まず r の代りに (44.d.10) により定義された ρ を用いる． 普通の極座標系にまねて

$$\cos\theta = \frac{z}{\rho} \qquad (44.\mathrm{e}.1)$$

で θ を定義する．さらに φ を

$$(\rho - ih)e^{i\varphi}\sin\theta = x + iy \qquad (44.\mathrm{e}.2)$$

となるように定義する．最後に x^0 の代りに新しい時間変数 u を

$$u = x^0 + \rho \qquad (44.\mathrm{e}.3)$$

で定義する．

これらの新しい座標変数 $(u, \rho, \theta, \varphi)$ を用いて (44.d.9) をかきかえると

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a\rho}{\rho^2 + h^2\cos^2\theta}\right)(du)^2 + (\rho^2 + h^2\cos^2\theta)(d\theta)^2 + \left\{(\rho^2 + h^2)\sin^2\theta + \frac{a\rho h^2\sin^4\theta}{\rho^2 + h^2\cos^2\theta}\right\}(d\varphi)^2$$

（次ページへつづく）

$$+2dud\rho+\frac{2a\rho h\sin^2\theta}{\rho^2+h^2\cos^2\theta}dud\varphi+2h\sin^2\theta d\rho d\varphi \qquad (44.e.4)$$

となる．この ds^2 には $d\varphi$ はあるが，φ 自身は顔をださない．したがって z 軸に関して軸対称である．このことはもとの (44.d.9) をみてももちろんわかる．

さて，つぎの節で重力場の源である物質が自転しているとき，それの周囲の重力場が (44.e.4) により表わされることを示そう．また，源の物質の自転にともない，その周囲の時空もこれにひきずられて回転することも示そう．その準備として (44.e.4) をさらに見やすい形にかきかえる．

まず手本として，平坦な時空内で，或る Lorentz 系に対して一定の角速度 ω で回転している円板上に設けた座標系を考えよう．これを基準にしたときの ds^2 は，慣性系 (Lorentz 系) の ds^2：

$$ds^2=-(dx^0)^2+(d\bar{r})^2+(\bar{r}\,d\bar{\varphi})^2+(dz)^2,$$

$$x=\bar{r}\cos\bar{\varphi}, \qquad y=\bar{r}\sin\bar{\varphi}$$

に対して $\bar{\varphi}\to\varphi$ (回転円板上の基線から測った角) という変換をすることにより求められる．$\bar{\varphi}$ と φ の関係は

$$\varphi=\bar{\varphi}-\omega t$$

である．そこで新変数 φ を使うと，回転円板上からみた ds^2 は

$$ds^2=-\left(1-\frac{\omega^2\bar{r}^2}{c^2}\right)(dx^0)^2+(d\bar{r})^2+(\bar{r}\,d\varphi)^2+(dz)^2$$
$$+2\omega(\bar{r})^2d\varphi dt. \qquad (44.e.5)$$

(44.e.5) の計量テンソルの特徴は $d\varphi dt$ の係数が 0 でないことである．

(44.e.4) には $dud\varphi$ のほかに，$dud\rho$, $d\rho d\varphi$ という項もあるから後の2つを消すために，さらに新しい座標系を用いて (44.e.4) をかきかえよう．

まず $(u, \rho, \theta, \varphi)$ をあらためて (x^0, x^1, x^2, x^3) とかくことにする．これに対応して (44.e.4) の係数を $g_{\mu\nu}$ とかくことにする．すなわち，(44.e.4) を

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

とかけば，0 でない $g_{\mu\nu}$ は g_{00}, g_{22}, g_{33}, g_{01}, g_{03}, g_{13} である．ここで新変数 $x^{\mu\prime}$ をつぎのように定義する：

$$\left.\begin{aligned} x^{0\prime} &\overset{d}{\equiv} ct' = x^0 - A(x^1), \\ x^{3\prime} &= x^3 - B(x^1), \\ x^{1\prime} &= x^1 = \rho, \qquad x^{2\prime} = x^2 = \theta. \end{aligned}\right\} \tag{44.e.6}$$

A, B は ρ だけの未定の関数である．これを適当に選んで，新しい系からみたとき，$g_{01}{}'$ や $g_{13}{}'$ が 0 となるようにすればよい．

変換後の $g_{01}{}'$, $g_{13}{}'$ は

$$g_{01}{}' = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{0\prime}}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{1\prime}}g_{\mu\nu}(x) = g_{01} + g_{00}\frac{dA}{d\rho} + g_{03}\frac{dB}{d\rho},$$

$$g_{13}{}' = g_{13} + g_{03}\frac{dA}{d\rho} + g_{33}\frac{dB}{d\rho}$$

である．これらがいずれも 0 となるという要請から

$$\frac{dA}{d\rho} = \frac{\rho^2 + h^2}{\rho^2 + h^2 - a\rho}, \qquad \frac{dB}{d\rho} = \frac{-h}{\rho^2 + h^2 - a\rho} \tag{44.e.7}$$

となる． これを ρ で積分すれば， $A(\rho)$, $B(\rho)$ がきまる． $g_{\mu\nu}{}'$ の他の成分も (44.e.7) を用いれば計算できる．

そこで，新しい系における ds^2 は

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1 - \frac{a\rho}{\rho^2 + h^2\cos^2\theta}\right)(cdt')^2 + \frac{\rho^2 + h^2\cos^2\theta}{\rho^2 + h^2 - a\rho}(d\rho)^2 \\ &+ (\rho^2 + h^2\cos^2\theta)(d\theta)^2 + \left\{(\rho^2 + h^2)\sin^2\theta \right. \\ &\left. + \frac{a\rho h^2\sin^4\theta}{\rho^2 + h^2\cos^2\theta}\right\}(d\varphi')^2 + 2\frac{a\rho h\sin^2\theta}{\rho^2 + h^2\cos^2\theta}c\,dt'd\varphi' \end{aligned} \tag{44.e.8}$$

となる.* ここで意味がわかりやすいように ($x^{0\prime}$, $\cdots$, $x^{3\prime}$) の代りに (ct', $\rho' = \rho$, $\theta' = \theta$, φ') を用いた．また，ρ と θ は $'$ が不要だからはぶいた．

ここで，$h \to 0$ とすれば

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{\rho}\right)(c\,dt')^2 + \left(1 - \frac{a}{\rho}\right)^{-1}(d\rho)^2 + (\rho\,d\theta)^2 + (\rho\sin\theta\,d\varphi')^2$$

---

* この a はまだ勝手なパラメーターにすぎない．重力の源の物体の質量を M とするとき，a を $2GM/c^2$ に等しくとるためには，この解と Schwarzschild のそれとの類似性を利用する必要がある．

となる．これは Schwarzschild の解のよく知られた形である．

§45. Kerr の解の性質

Kerr の解（44.e.8）にはつぎの特徴がある．ここで ′ ははぶくことにする．

i）$t \to -t$，同時に $\varphi \to -\varphi$ に対して ds^2 は不変．

ii）$\varphi \to -\varphi$，同時に $h \to -h$ に対して ds^2 は不変．

iii）$g_{\mu\nu}$ は φ, t に無関係，すなわち z 軸に対して軸対称で，定常的である．

iv）$h \to 0$ では Schwarzschild の解と一致する．

v）$d\varphi dt$ に比例する項がある．これは平担な時空内で慣性系に対して一定の角速度で回転している円板上に設けた直交系の ds^2 とよく似た点である．

ここで Kerr の解の意味を知るために，一定の密度をもつ球が自転しているとき，それの作る重力場に対して 1918 年，Lense と Thirring が近似的に求めた解を思い起こしてみよう．* 彼らは線形近似を用いてつぎのような ds^2 を導いた：　球の外では

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right)(c\,dt)^2 + \left(1 + \frac{a}{r}\right)(d\vec{x})^2 - 4\frac{GJ}{c^3 r}\sin^2\theta\, d\varphi\, c\,dt. \tag{45.1}$$

ここで

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad z = r\cos\theta$$

である．G は Newton の万有引力定数である．球の質量を M とするとき $a = 2GM/c^2$．また球の自転の角運動量（第 0 近似として用いた Lorentz 系からみた角運動量）の大きさは J，方向は z 軸の正の向きとする．（45.1）は

$$\frac{a}{r} \ll 1, \qquad \frac{GJ}{c^3 r^2} \ll 1$$

のとき，これらの 1 次までの近似で有効な式である．

そこで（44.e.8）を（45.1）と比べてみよう．まず，a/ρ の 1 次までの近似

* J. Lense and H. Thirring: Phys. Z. **19** (1918) 156.

では (44.e.8) はつぎのようになる：

$$ds^2 = -\left(1-\frac{a}{\rho}\right)(c\,dt)^2 + \left(1-\frac{a}{\rho}\right)^{-1}(d\rho)^2 + \rho^2\{(d\theta)^2 + (\sin\theta\,d\varphi)^2\}$$
$$+ 2\frac{ah}{\rho}\sin^2\theta\,d\varphi\,c\,dt.$$

isotropic coordinate ρ' を

$$\rho = \rho'\left(1+\frac{a}{4\rho'}\right)^2$$

により定義すれば

$$ds^2 = -\frac{\{1-(a/4\rho')\}^2}{\{1+(a/4\rho')\}^2}(c\,dt)^2 + \left(1+\frac{a}{4\rho'}\right)^4(d\vec{x})^2$$
$$+ \frac{2ah}{\rho'\{1+(a/4\rho')\}^2}\sin^2\theta\,d\varphi\,c\,dt. \qquad (45.2)$$

ここで

$$\rho' = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

である．$a \ll \rho'$ であるから

$$ds^2 = -\left(1-\frac{a}{\rho'}\right)(c\,dt)^2 + \left(1+\frac{a}{\rho'}\right)(d\vec{x})^2 + \frac{2ah}{\rho'}\sin^2\theta\,d\varphi\,c\,dt. \qquad (45.3)$$

(45.1) の r と (45.3) の ρ' を同一の量と考え，Kerr の a を (45.1) の a と同じもの，すなわち $2GM/c^2$ とおき，さらに

$$\text{Kerr の } 2ah\left(=4\frac{GMh}{c^2}\right) = -4\frac{GJ}{c^3} \qquad (45.4)$$

とおくとき，(45.1) と (45.3) は完全に一致する．上の式から Kerr の未定の定数 h の意味は明らかとなる．すなわち

$$h = -\frac{J}{Mc}. \qquad (45.4)'$$

重力場の源の物体のスピンの向きが z 軸の正の向きと一致しているときは $h<0$, 逆向きなら $h>0$ である．

以上の結果から，中心にある質量 M の軸対称の物体がスピン J をもつとき，その周囲の重力場は Kerr の解 (44.e.8) で表わされることがわかった．また，

定数 a, h は

$$a=\frac{2GM}{c^2},\qquad h=-\frac{J}{Mc}$$

であたえられる．

さて§44,（e）で約束したように，源の物体の自転にともない，その周囲の時空がひきずられて回転していることを示そう．時空が回転しているか否かを知るには，そこに設けた座標系を基準にとって質点の運動を観察したとき，それに Coriolis の力や遠心力が作用しているか否かをみればわかる．

Newton 力学では慣性系に対して角速度 $\vec{\omega}$ をもって回転している座標系からながめたとき，速度 $\vec{v}$ をもって運動している質点には，質点の質量を μ とするとき

$$2\mu\vec{v}\times\vec{\omega}$$

という Coriolis の力が作用する．

Kerr の時空でもこれとよく似た力が質点に作用していることを示そう．質点の作用積分は，a/ρ の1次までの近似では，(44.e.8) から

$$I=\int\Big[-\Big(1-\frac{a}{\rho}\Big)(\dot{x}^0)^2+\Big(1-\frac{a}{\rho}\Big)^{-1}(\dot{\rho})^2+\rho^2\{(\dot{\theta}^2)+(\sin\theta\dot{\varphi})^2\}$$
$$+2\frac{ah}{\rho}\sin^2\theta\,\dot{x}^0\dot{\varphi}\Big]d\tau.$$

・は τ に関する微分を示す．ここでも $\theta=\pi/2$ とおくことができるから，φ および x^0 に関する Euler の方程式に $\theta=\pi/2$ を代入すると

$$\frac{d}{d\tau}\Big\{\rho^2\dot{\varphi}+\frac{ah}{\rho}\dot{x}^0\Big\}=0,\qquad(45.5)$$

$$\Big(1-\frac{a}{\rho}\Big)\dot{x}^0=一定=b>0.\qquad(45.6)$$

ここである瞬間に質点は $\varphi=0$ の方向に走っているとする．つまり，そのとき $\varphi=0$, $\dot{\varphi}=0$ とする．したがって，(45.6) により (45.5) の $\dot{x}^0$ を消去すると，この瞬間には (45.5) は

$$\rho^2\ddot{\varphi}=\frac{ahb}{(\rho-a)^2}\dot{\rho},$$

あるいは a/ρ の2次以上の項を無視すると

$$\rho\ddot{\varphi} = \frac{ahb}{\rho^3}\dot{\rho}. \tag{45.7}$$

一方，Newton 力学で質量 μ の質点が外力を受けずに運動しているとき，これを回転座標系からみた場合の方程式を考えてみよう．いま，回転軸を z 軸とし，回転系の x 軸上を x 軸の正の方向に走っている質点の運動方程式の y 成分は

$$\mu\frac{d^2y}{dt^2} = 2\mu\left(-\frac{dx}{dt}\right)\omega,$$

あるいは極座標を使って $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$ とおけば $\varphi = 0,\ \dot{\varphi} = 0$ に対して

$$\rho\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -2\omega\frac{d\rho}{dt} \tag{45.8}$$

となる．

(45.8) と (45.7) の比較から，Kerr の時空では，原点からの“距離”が ρ の地点では，時空は z 軸のまわりを角速度

$$\omega = -\frac{ahb}{2\rho^3} = \frac{GbJ}{c^3\rho^3} \tag{45.9}$$

で回転していることがわかる．源の物体のスピン J が正のときは，回転速度 ω も正となる．つまり，物体の自転と同じ向きに時空も回転している．回転速度は ρ が大きくなるにつれて急激に減少し，無限遠では0となる．このことから時空は物体に引きずられていると考えてよかろう．

§46. Kerr の特異面

Kerr の解 (44.e.8)，あるいはその ′ をはぶいた

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1-\frac{a\rho}{\rho^2+h^2\cos^2\theta}\right)(dx^0)^2 + \frac{\rho^2+h^2\cos^2\theta}{\rho^2+h^2-a\rho}(d\rho)^2 \\ &+(\rho^2+h^2\cos^2\theta)(d\theta)^2 + \left\{(\rho^2+h^2)\sin^2\theta + \frac{a\rho h^2\sin^4\theta}{\rho^2+h^2\cos^2\theta}\right\}(d\varphi)^2 \\ &+2\frac{a\rho h\sin^2\theta}{\rho^2+h^2\cos^2\theta}dx^0 d\varphi \end{aligned} \tag{46.1}$$

の $g_{\mu\nu}$ は0点と特異点をもつ．まず，$(dx^0)^2$ の係数 g_{00} は

$$\rho^2 - a\rho + h^2\cos^2\theta = 0 \tag{46.2}$$

において $g_{00}=0$ となる．また，$(d\rho)^2$ の係数 $g_{\rho\rho}$ は

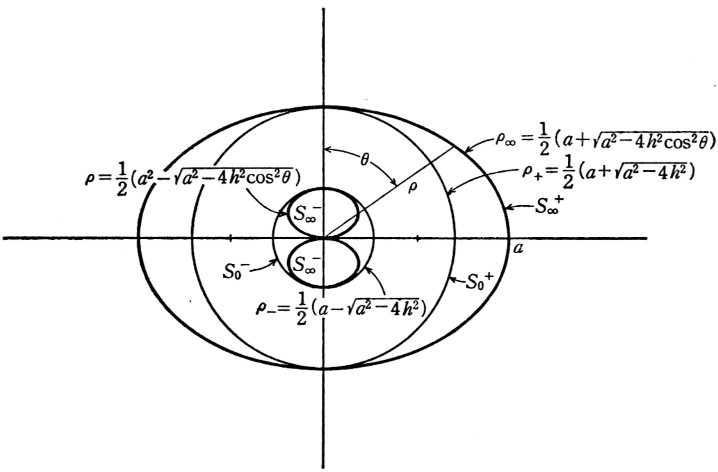
$$\rho^2 - a\rho + h^2 = 0 \tag{46.3}$$

で無限大となる．その他の係数は $\theta=0$，あるいは π のような座標系に固有な特異点をのぞいては0ともならず，また発散もしない．たとえば $\theta=0$，π では $g_{\varphi\varphi}$ や $g_{0\varphi}$ は0となる．ただ $\rho=0$ は真の特異点である．

これから特異面 (46.2) および (46.3) について調べてみよう．まず (46.2) は2個の閉曲面

$$\rho = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2 - 4h^2\cos^2\theta}\right) \tag{46.2$'$}$$

をあたえる．$+\sqrt{\ }$ に対応する面を $S_\infty{}^+$，$-\sqrt{\ }$ の方を $S_\infty{}^-$ と名づけよう (**第15図** 参照)．



第 15 図

また，(46.3) は2個の球面 ($a > 2h$ と仮定する)

$$\rho = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2 - 4h^2}\right) \tag{46.3$'$}$$

を表わす．これらの面を ± に応じて $S_0{}^+$, $S_0{}^-$ と呼ぶことにする．

一般に

$$u(x^0, x^1, x^2, x^3) = \mathrm{const}$$

という式で表わされる超曲面の法線ベクトル n_μ は

$$n_\mu \propto \partial_\mu u \overset{d}{\equiv} u_{,\mu}$$

である．特に

$$n_\mu n_\nu g^{\mu\nu} = 0$$

のときこの曲面をヌル面とよぶことにする．

(46.1) に対応する $g^{\mu\nu}$ の 0 でないものは

$$g^{00} = g_{\varphi\varphi}/\Delta, \qquad g^{0\varphi} = -g_{0\varphi}/\Delta,$$
$$g^{\varphi\varphi} = g_{00}/\Delta, \qquad g^{\theta\theta} = 1/g_{\theta\theta},$$
$$g^{\rho\rho} = 1/g_{\rho\rho}, \qquad \Delta \overset{d}{\equiv} g_{00}g_{\varphi\varphi} - (g_{0\varphi})^2$$

である．これを用いると $S_0{}^{\pm}$ はヌル曲面であることがわかる．なぜなら

$$u \overset{d}{\equiv} \rho - \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - 4h^2}) = 0$$

であるから，$u_{,\mu}$ の 0 でないものは

$$u_{,\rho} = 1$$

だけである．したがって

$$n_\mu n_\nu g^{\mu\nu} \propto g^{\rho\rho} u_{,\rho} u_{,\rho} = g^{\rho\rho} = \frac{\rho^2 + h^2 - a\rho}{\rho^2 + h^2 \cos^2\theta}.$$

これは $S_0{}^{\pm}$ 上のいたるところで 0 となる．

これに対して $S_\infty{}^{\pm}$ の場合には

$$u \overset{d}{\equiv} \rho^2 - a\rho + h^2 \cos^2\theta = 0$$

とおけば

$$u_{,\rho} = 2\rho - a, \qquad u_{,\theta} = -2h^2 \cos\theta \sin\theta.$$

そこで

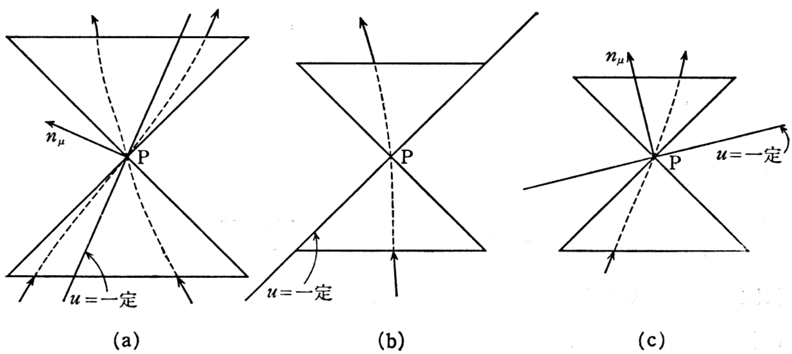
$$g^{\mu\nu} u_{,\mu} u_{,\nu} = \frac{(\rho^2 + h^2 - a\rho)(2\rho - a)^2 + h^4 \sin^2 2\theta}{\rho^2 + h^2 \cos^2\theta}.$$

そこで $S_\infty{}^{\pm}$ の上では $\rho^2 - a\rho = -h^2 \cos^2\theta$ であるから上の式の右辺は

$$\frac{h^2\{(2\rho - a)^2 \sin^2\theta + h^2 \sin^2 2\theta\}}{a\rho} > 0$$

となる．したがって，$S_\infty{}^\pm$ の法線ベクトルは面上のいたるところで（$\theta=0$ と π をのぞいて）空間的ベクトルである．

さて，再び一般の超曲面 $u(x)=\mathrm{const}$ を考えよう．この面上の任意の1点Pを頂点とし，未来の方向に開いた光円錐を考えよう．P点を通る質点の世界線は必ずこの未来向きの光円錐の中にはいる．もしそれが光線ならばそれはこの円錐面上にのる．ところで，超曲面 u の上の点Pにおける法線ベクトルがもし空間的ならば，Pにおける面 u の接線ベクトルは時間的，空間的ならびにヌル・ベクトルのいずれの場合も可能である．このことは点Pで局所 Lorentz 系を用いて調べれば容易にわかる．したがって面 u は未来向きの光円錐と交差する．あるいは面 u により未来向き光円錐は縦に2つに分割される．したがって，質点も光線もPを通って面 u のいずれの側からも，その反対側に通りぬけることができる［**第16図（a）**参照］．



第 16 図

これに対して曲面 u のPにおける法線ベクトルがヌル・ベクトルならば，それは点Pにおける光円錐面上にのっているはずである．このときはPを通る面 u の接線ベクトルのうちヌル・ベクトルが1個だけ存在し，そのベクトルにそって，面 u は光円錐に接している．このときは第16図の（**b**）からもわかるように質点は面 u の一方（図では右下）から他方（図の左上）にだけぬけることができるが，逆向きにつきぬけることはできない．このようなときは面 u は半透膜の性質をもつ．最後に法線ベクトル n_μ が時間的な場合にも，質点は

面の過去側から未来側にだけつきぬけることができる．この場合には面 u は P の近傍で時空を未来と過去に二分する［**第 16 図（c）**参照］．

以上に述べたことを面 S_0, S_∞ に適用すると，質点も光も $S_\infty{}^+$ を任意の向きに自由に通りぬけることができる．これに反して $S_0{}^+$ は反透膜である．したがって，外から内部にはいることはできても，その逆は不可能である．つまり $S_0{}^+$ は事象の地平線の役目を荷なう．なお，$S_0{}^+$ の外側から内側に向かってこれを通りぬけることができることは，$h\to 0$ の極限を考えれば，この向きの正しいことが理解できよう．

次に $S_\infty{}^+$ の性質を調べてみよう．いま，$S_\infty{}^+$ 上の１点 P（この座標を $\rho = a+\varepsilon,\ \theta=\pi/2,\ \varphi=0$ とする）に固定された光源から発射された光を $S_\infty{}^+$ の外部にある点 Q で観測するとしよう．* 正確には点 P は $S_\infty{}^+$ より ε だけ外側にあるとする．なぜならばこの点の世界線の接線ベクトル $dx^\mu/d\tau$ は

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = -\frac{\varepsilon}{a+\varepsilon}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 < 0$$

となるから，たとえば点 P に光源を固定しておくことは許される．

光線は $\theta=\pi/2$ という平面上にあるとする．その軌跡を $x^\mu(\lambda)$ とする．λ は適当なパラメーターである．$x^\mu(\lambda)$ の満たすべき方程式は，$\theta=\pi/2$ とすると

$$-\left(1-\frac{a}{\rho}\right)\left(\frac{dx^0}{d\lambda}\right) + \frac{ah}{\rho}\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right) = \text{一定} = A, \tag{46.4}$$

$$\frac{ah}{\rho}\frac{dx^0}{d\lambda} + \left(\rho^2 + h^2 + \frac{ah^2}{\rho}\right)\frac{d\varphi}{d\lambda} = \text{一定} = B, \tag{46.5}$$

および光の軌道がヌル測地線であることを示す式

$$-\left(1-\frac{a}{\rho}\right)\left(\frac{dx^0}{d\lambda}\right)^2 + \frac{\rho^2}{\rho^2+h^2-a\rho}\left(\frac{d\rho}{d\lambda}\right)^2 + \left(\rho^2+h^2+\frac{ah^2}{\rho}\right)\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 + 2\frac{ah}{\rho}\frac{dx^0}{d\lambda}\frac{d\varphi}{d\lambda} = 0 \tag{46.6}$$

である．

（46.4），（46.5）から

---

* 星の実際の表面が $S_\infty{}^+$ と一致したとする．ところで，星は座標系（46.1）からみて自転している．したがって，ここに考えている光源は座標系に対しては静止しているが，星の表面に静止しているわけではない．

$$\frac{dx^0}{d\lambda}=F(\rho),\qquad \frac{d\varphi}{d\lambda}=G(\rho) \tag{46.7}$$

の形にかかれる．これらを (46.6) に代入すれば

$$\frac{d\rho}{d\lambda}=\pm\frac{\sqrt{\rho^2-a\rho+h^2}}{\rho}(\rho\text{ の関数})\overset{d}{\equiv}\pm H(\rho) \tag{46.8}$$

となる．いま，P から出た光が外に向かって進むとすれば上の解の + をとればよい．ρ と x^0 の関係は (46.7)，(46.8) から

$$\frac{d\rho}{dx^0}=\frac{H(\rho)}{F(\rho)}. \tag{46.9}$$

いま，光が時刻 t から $t+\Delta t$ の間，点 P から放射されたとする．これが点 Q (その ρ 座標を ρ_Q とする) に到達した時刻を t'，最後の光の到達した時刻を $t'+\Delta t'$ とすれば，(46.9) から

$$\int_{a+\varepsilon}^{\rho_Q}\frac{F(\rho)}{H(\rho)}\,d\rho=c\int_t^{t'}dt=c\int_{t+\Delta t}^{t'+\Delta t'}dt.$$

したがって

$$\Delta t=\Delta t'$$

となる．

そこで，この光の振動数に対する赤方偏移について§37と同様の考察をすれば，$S_\infty{}^+$ 面上の光源の固有時を用いて測った光の振動数を ν_P，これを点 Q において観測者の固有時を用いて測定したときの振動数を ν_Q とするとき，$\rho_Q\gg a$ とすれば

$$\frac{\nu_P}{\nu_Q}=\frac{\Delta\tau_Q}{\Delta\tau_P}=\frac{\sqrt{-g_{00}(Q)}}{\sqrt{-g_{00}(P)}}\approx\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}.$$

したがって，$\varepsilon\to 0$ の極限で

$$\frac{\nu_P}{\nu_Q}=\infty$$

となる．つまり $S_\infty{}^+$ から出る光は無限大の赤方偏移をうける．外部でこれを観測するとき，その振動数は 0，波長は∞となる．

Schwarzschild の時空では $r=a$ という特異面は，事象の地平線であると同時に，その表面から発射された光が外部にでてきたとき無限大の赤方偏移をう

けるという特性をもっていた．Kerr の場合にはこれら両方の特徴は分割され，地平線の性質は S_0^+ の役目であり， 無限大の赤方偏移は S_0^+ よりも外部にある S_∞^+ により引き起こされる． これらの面は $h\to 0$ とともに同一の球面に合体する．これら両面にはさまれた領域についてはエネルギー的に興味ある特性をもっているが，あまり話が長くなるので Kerr の解の話はこれで終りとする．

第8章　Einstein 方程式の数学的性質

§47. Einstein の方程式の初期値問題

問題の本質的な点だけを浮彫りにするために，ここでは物質がなにもない空(から)の空間における Einstein の方程式

$$G_{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \tag{47.1}$$

について考える．既に何度も述べたように，10個の連立偏微分方程式（47.1）の間には4個の恒等的関係式

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} \equiv 0 \tag{47.2}$$

が存在する．これは方程式（47.1）が一般座標変換に対して共変であるという性質に由来する．恒等式(47.2)のために未知量 $g_{\mu\nu}$ の数に比べて方程式(47.1)の数が4個だけ不足している．その結果，（47.1）に対して初期値を与えて，これの解を求めようとするとき，（47.1）は必ずしも典型的な初期値問題のスタイルをしているとはいえない．そこでこれから，(47.1)の数学的構造，(47.2)の役割について立ち入って検討してみよう．

（47.1）は時間 x^0 についての2階微分方程式である．そこで，たとえば，$x^0=0$ という瞬間（これは時空の中のひとつの超曲面を表わす）における $g_{\mu\nu}$，$\partial g_{\mu\nu}/\partial x^0$ の値がすべての場所（x^1, x^2, x^3）に対して与えられていれば，$x^0>0$ の時刻における $g_{\mu\nu}$ の値は（47.1）により決定されると考えるのが普通の場合である．そこで今後，$x^0=0$ という超曲面をSと名づけよう．Sは空間的超曲面であるとする．つまりS上のどの点でもその法線ベクトルが時間的であるとする．一般にある超曲面を表わす方程式を

$$f(x^0, x^1, \cdots, x^3) = 0$$

とすれば，その法線ベクトル $n_\mu(x)$ は§46でも述べたように

$$n_\mu(x) \propto \partial_\mu f$$

である．これが時間的であるならば

$$n_\mu n_\nu g^{\mu\nu} < 0$$

が成立する．S を表わす式は

$$f = x^0 = 0$$

である．したがって

$$n_0 \propto 1, \qquad n_1 = n_2 = n_3 = 0.$$

これが時間的ベクトルであるという要請は

$$n_\mu n_\nu g^{\mu\nu} = g^{00} < 0$$

により表わされる．したがって，今後は S の上のすべての点で

$$g^{00} < 0 \tag{47.3}$$

と仮定する．

さて，(47.1) は 10 個の方程式

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{47.1$'$}$$

と同等である．これを $g_{\mu\nu}$ の 2 階微係数に着目してかくと

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \{g_{\rho\sigma,\mu\nu} + g_{\mu\nu,\rho\sigma} - g_{\mu\sigma,\nu\rho} - g_{\nu\sigma,\mu\rho}\} + K_{\mu\nu} = 0. \tag{47.1$''$}$$

ここで $K_{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ および $g_{\mu\nu,\lambda}$ だけの関数である．

これから本節ではギリシャ文字 $\lambda, \mu, \cdots$ 等は 0, 1, 2, 3 を表わし，ラテン文字 $i, j, k, \cdots$ 等は 1, 2, 3 を表わすものと約束する． さらにひとつの項の中に同じ添字が 2 か所にでてきたとき，それがラテン字ならば 1 から 3 まで，またそれがギリシャ字ならば，それについて 0 から 3 まで和をとるものとする．

(47.1)$''$ をさらに時間微分に注目してかきわけてみよう：

$$R_{ij} = \frac{1}{2} g^{00} \frac{\partial^2 g_{ij}}{(\partial x^0)^2} + N_{ij} = 0, \tag{47.4 a}$$

$$R_{i0} = -\frac{1}{2} g^{0k} \frac{\partial^2 g_{ki}}{(\partial x^0)^2} + N_{i0} = 0, \tag{47.4 b}$$

$$R_{00} = \frac{1}{2} g^{ik} \frac{\partial^2 g_{ik}}{(\partial x^0)^2} + N_{00} = 0. \tag{47.4 c}$$

ここで $N_{\mu\nu}$ は $g_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta,\rho}$ および $g_{\alpha\beta,\rho k}$ の関数ではあるが $g_{\alpha\beta,00}$ は含まない．

さて，(47.4) はつぎのような不都合な形をしている．

a)　いま，S 上の各点における $g_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta,0}$ の値が与えられているとする．これらの量の S 面にそっての微分は何回でも上述の初期値をもとに計算できるから，そのような微係数はすべて既知のものと考えてよい．また $N_{\mu\nu}$ に対する上述の説明から，$N_{\mu\nu}$ の S 上における値はわかっている．そこで (47.4) から $g_{ik,00}$ も決定される．しかし (47.4) には $g_{0\mu,00}$ はでてこない．したがってこの4個の量はきまらない．それゆえ Einstein の方程式を初期値問題の形で解こうとしても，それは不可能のように思われる．

b)　他方，(47.4) はつぎのような一見，不都合と思われる形をしている．さきにも述べたように，これには6個の量 g_{ik} の2階時間微係数だけが顔をだしている．S 上における $g_{ik,00}$ を決定するには (47.4a) だけで十分である．ところがそのほかに4個の方程式 (47.4b), (47.4c) もあるから，方程式の方が多すぎる．これら2点についてくわしく考えてみよう．

まず問題点 a) からはじめよう．解答をさきにいえば

$$g_{0\mu,00}=0 \qquad (\text{S の上で})$$

と選ぶことが必ずできる．いま仮に $g_{0\mu,00}$ の S 上の値が何かの方法で与えられているとする．しかもそれは0ではないとする．いま，面Sの近傍でつぎのような座標変換を考えよう：

$$x^{\mu} \to x^{\mu\prime}=x^{\mu}+\frac{1}{3!}(x^0)^3 f^{\mu}(x). \tag{47.5}$$

ただし f^{μ} は x^1, x^2, x^3 だけの未定の関数とする．新しい座標系 (x'-系) からみたとき，S を表わす方程式は

$$x^{0\prime}=0$$

である．また S の上では

$$\left.\frac{\partial x^{\lambda\prime}}{\partial x^{\rho}}\right)_S=\delta^{\lambda}{}_{\rho}, \qquad \left.\frac{\partial^2 x^{\lambda\prime}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\sigma}}\right)_S=0,$$

$$\left.\frac{\partial^3 x^{\lambda\prime}}{(\partial x^0)^3}\right)_S=\left.f^{\lambda}(x)\right)_S, \qquad \text{その他の3階微係数}=0.$$

したがってこの変換の Jacobian の S 上における値は1に等しい．さらに以下

の関係式も導かれる：

$$g_{\mu\nu})_S = \frac{\partial x^{\alpha\prime}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta\prime}}{\partial x^{\nu}}g_{\alpha\beta}{}'\Big)_S = g_{\mu\nu}{}')_S\,,$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}\Big)_S = \frac{\partial g_{\mu\nu}{}'}{\partial x^{\lambda\prime}}\Big)_S,$$

$$\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^k \partial x^{\lambda}}\Big)_S = \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}{}'}{\partial x^{k\prime}\partial x^{\lambda\prime}}\Big)_S.$$

しかし $g_{\mu\nu,00}$ については

$$\frac{\partial^2 g_{ik}}{(\partial x^0)^2}\Big)_S = \frac{\partial^2 g_{ik}{}'}{(\partial x^{0\prime})^2}\Big)_S,$$

$$\frac{\partial^2 g_{i0}}{(\partial x^0)^2}\Big)_S = \frac{\partial^2 g_{i0}{}'}{(\partial x^{0\prime})^2}\Big)_S + g_{i\lambda}{}'f^{\lambda})_S\,,$$

$$\frac{\partial^2 g_{00}}{(\partial x^0)^2}\Big)_S = \frac{\partial^2 g_{00}{}'}{(\partial x^{0\prime})^2}\Big)_S + 2g_{0\lambda}{}'f^{\lambda})_S\,.$$

そこで未定の関数 f^{λ} の S 上の値を

$$f^{\lambda}(x) = \left\{g^{\lambda i\prime}g_{i0,00} + \frac{1}{2}g^{\lambda 0\prime}g_{00,00}\right\}_S$$

のように選べば，x'-系からみたとき $g_{0\mu,00}{}'$ の S の上の値は 0 となる．この場合 $g_{\mu\nu}$，$g_{\mu\nu,\lambda}$，$g_{\mu\nu,k\lambda}$ の S 上における値は［したがってこれらから (47.4) により決定される $g_{ik,00}$ の値も］変化しない．

面 S より未来の点における g_{ik} の値を求めるには，S 上のすべての点において，g_{ik} の時間に関するすべての高階微係数の値を求めねばならない．それには (47.4) を x^0 について何回も微分し，逐次 g_{ik} の高階微係数を求めればよい．たとえば $g_{ik,000}$ を知るには (47.4a) を x^0 について 1 階微分すればよい．そのとき N_{ik} の項からは $g_{ik,00}$ や $g_{0\alpha,00}$ がでてくる．前者は既にその値を求めてある．後者は上に説明したように 0 とおくことができる．このようにして，$g_{ik,000}$ は完全にきまる．つぎに $\partial^4 g_{ik}/(\partial x^0)^4$ を求めるには (47.4a) を x^0 について 2 階微分すればよい．このときは N_{ij} の中に $g_{0\alpha,000}$ が顔をだす．これもまた不定の量である．しかし，たとえば

$$x^{\mu} \to x^{\mu\prime} = x^{\mu} + \frac{(x^0)^4}{4!}h^{\mu}(x^1, x^2, x^3)$$

という変換を行い，関数 h^{μ} を適当にとれば，$g_{\mu\nu}$，$g_{\mu\nu,\alpha}$，$g_{\mu\nu,\alpha\beta}$ の値はそのままに保ち，ただ $g_{0\alpha,000}$ だけに任意の値（たとえば0）を与えることができる．このような操作をつぎつぎに高い階数にまでくり返していけば，結局，S上における $g_{0\alpha}$，およびその x^0 に関するすべての階数の微係数が全く任意にとりうることになる．つまりSおよび，それより未来の領域のすべての点における $g_{0\alpha}$ の値が全く勝手にとりうることになる．

上述の説明からわかるように，(47.4) の解を求めるためにS上における初期値 $g_{\mu\nu}$，$g_{\mu\nu,0}$ をあたえても，解は一意的にはきまらない．(47.4) の解 g_{ik} は $g_{0\alpha}(x^0, x^1, x^2, x^3)$ という不定関数に依存することがわかる．これはまことに不満足なことのように思われるが，これこそ (47.4) が一般座標変換に対して共変であるという事情に由来することである．また何度もいうように，これは，方程式 (47.4) の間に4個の恒等的関係が存在することにもとづく．

$g_{0\nu}$ の与えかたにより (47.4) の解の見かけの形は異なるが，それは座標系の選び方による違いにすぎない．時空の幾何学的性質，換言すれば重力場の特徴はこのような見かけの違いには無関係である．つまり適当な座標変換によりひとつの解から見かけ上異なる別の解を導いたとしても，それらは物理的にいえば全く同じ重力場（幾何学的にいえば全く同じ幾何学的性質をもつ時空）を表わすものである．

つぎに問題点 b) に移ろう．さきにも述べたようにS上のどの点においても $g^{00} < 0$ である．したがって，(47.4a) から

$$g_{ij,00} = -\frac{2N_{ij}}{g^{00}} \tag{47.6 a}$$

という形に解ける．これを (47.4b)，(47.4c) に代入すると

$$\frac{g^{0k}N_{ki}}{g^{00}} + N_{i0} = 0, \tag{47.6 b}$$

$$-\frac{g^{ik}N_{ik}}{g^{00}} + N_{00} = 0 \tag{47.6 c}$$

となる．(47.6b)，(47.6c) にはもはや $g_{\mu\nu,00}$ は含まれない．したがって，(47.6b)，(47.6c) はS上に与えた初期値 $g_{\mu\nu}$，$g_{\mu\nu,0}$（およびこれらの x^k に関

する微分）の間に成立すべき関係式である．したがって，(47.6b)，(47.6c) は初期値に対する条件式である．つまりこれは g_{ik} が時間とともにどのように変化していくかを教える（本来の意味の）場の方程式ではない．真の場の方程式は (47.6a) あるいは (47.4a) である．

ところで，(47.6b)，(47.6c) はつぎのようにかき表わすこともできる．まず，ベクトル密度の形にかいた Bianchi の恒等式

$$\nabla_\mu \boldsymbol{G}^\mu{}_\nu = \partial_\mu \boldsymbol{G}^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\nu} \boldsymbol{G}^{\alpha\beta} \equiv 0$$

を考えてみよう．これをつぎのようにかきかえる：

$$\partial_0 \boldsymbol{G}^0{}_\nu \equiv -\partial_k \boldsymbol{G}^k{}_\nu + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\nu} \boldsymbol{G}^{\alpha\beta}. \qquad (47.2)'$$

(47.2)′ の右辺には $g_{mn,00k}$ はでてくるが $g_{mn,000}$ は含まれない．したがって左辺の $\boldsymbol{G}^0{}_\nu$ には $g_{mn,00}$ は含まれない．つまり $\boldsymbol{G}^0{}_\nu$ は $g_{\mu\nu}$，$g_{\mu\nu,\rho}$，$g_{\mu\nu,\rho k}$ だけの関数である．したがって $G^0{}_\nu$ の S の上の値も初期値によって決定される．

$G^0{}_\nu$ はつぎのようにかき表わされる：

$$G^0{}_0 = R^0{}_0 - \frac{1}{2} R = \frac{1}{2} \{g^{00} R_{00} - g^{mn} R_{mn}\}.$$

(47.4) を代入すると予想どおり $g_{mn,00}$ の項は相殺して

$$G^0{}_0 = \frac{1}{2} (g^{00} N_{00} - g^{mn} N_{mn}). \qquad (47.7)$$

同様に

$$G^0{}_i = R^0{}_i = g^{00} R_{0i} + g^{0k} R_{ki} = g^{0k} N_{ki} + g^{00} N_{0i}. \qquad (47.7)'$$

したがって，(47.6b)，(47.6c) は 4 個の式

$$G^0{}_\mu = 0 \qquad (47.8)$$

にほかならない．つまり 10 個の Einstein の方程式の初期値問題を解くには (47.1)′ の形式よりも

$$R_{ik} = \frac{1}{2} g^{00} g_{ik,00} + N_{ik} = 0, \qquad (47.4\,\mathrm{a})$$

$$G^0{}_i = g^{0k} N_{ki} + g^{00} N_{0i} = 0, \qquad (47.7)'$$

$$G^0{}_0=\frac{1}{2}(g^{00}N_{00}-g^{mn}N_{mn})=0 \tag{47.7}$$

という形にかいた方が扱いやすい．(47.7)，(47.7)′ は (47.4a) に与える初期値が満足すべき束縛条件である．勝手な初期値を与えても (47.4a) が解けるとは限らない．それが可能なためには，初期値は (47.7)，(47.7)′ を満足する必要がある．この意味で (47.7)，(47.7)′ は (47.4a) の積分可能性を保証する条件といえる．

§48．束縛条件 $G^0{}_\mu=0$

Einstein の方程式に対する初期値を解くには前節にも述べたように，場の方程式

$$R_{ik}=0 \tag{48.1}$$

を解けばよい．ただしこれに対する初期値はS上において，条件

$$G^0{}_\mu=0 \tag{48.2}$$

を満たさねばならない．

さて (48.1) を解けば，S上のデータ（つまり $x^0=0$ のデータ）から，それより少し未来の超曲面 S_1（この面の時刻を $x^0=\varDelta$ とする）上の $g_{\mu\nu}$ がすべてきまる．そこで，今度は S_1 上のデータからさらに次の面 $S_2(x^0=2\varDelta)$ の上の $g_{\mu\nu}$ を求める．このような操作を順にくり返せば $x^0>0$ の時空域における $g_{\mu\nu}$ が完全に求まるはずである．

この操作が可能なためにはSより未来にある各超曲面上の $g_{\mu\nu}$ がその面上で束縛条件 (48.2) を満たしていることを確かめねばならない．実際，以下に証明するように，(48.2) がSの上で成立していれば，未来のどの面の上でもそれは成立することがわかる．したがって，さきに述べた積分の手順を確かに一歩一歩と遂行できる．

[証明]　まず方程式 (48.1) はSの上だけでなく，Sより未来のすべての世界点で成立しているものとする．しかし条件 (48.2) はただSの上だけで成立することがわかっているものとする．

まず $G^0{}_\mu$ を $R_{\mu\nu}$ を用いてかき直そう：

$$G^0{}_k = R^0{}_k = g^{0i}R_{ik} + g^{00}R_{0k}.$$

これに (48.1) を代入すると，すべての世界点で

$$G^0{}_k = g^{00}R_{0k} \tag{48.3}$$

が成り立つ．同様に

$$G^0{}_0 = R^0{}_0 - \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}(g^{00}R_{00} - g^{ik}R_{ik}).$$

これも (48.1) のために

$$G^0{}_0 = \frac{1}{2}g^{00}R_{00}. \tag{48.3$'$}$$

となる．つまり，(48.1) のおかげで

$$\left.\begin{aligned} R_{0k} &= \frac{G^0{}_k}{g^{00}} \\ R_{00} &= \frac{2G^0{}_0}{g^{00}} \end{aligned}\right\} \tag{48.4}$$

という関係が成り立つ．

同じ方法で $G^i{}_\mu$ もかきかえてみよう：

$$\begin{aligned} G^i{}_k &= R^i{}_k - \frac{1}{2}\delta^i{}_k R \\ &= g^{i0}R_{0k} + g^{im}R_{mk} - \frac{1}{2}\delta^i{}_k(g^{00}R_{00} + 2g^{0m}R_{0m} + g^{mn}R_{mn}). \end{aligned}$$

これに (48.1) を適用し，さらに (48.4) を使うと

$$G^i{}_k = \frac{1}{g^{00}}\{g^{i0}G^0{}_k - \delta^i{}_k g^{0\mu}G^0{}_\mu\}. \tag{48.5}$$

全く同様に

$$G^i{}_0 = \frac{1}{g^{00}}\{2g^{i0}G^0{}_0 + g^{ik}G^0{}_k\} \tag{48.5$'$}$$

となる．つまり，$G^i{}_\mu$ は 4 個の量 $G^0{}_\nu$ の 1 次結合でかき表わされる．しかもその係数は $g^{\mu\nu}$ だけに依存する．したがって $\boldsymbol{G}^i{}_\mu$ についても

$$\boldsymbol{G}^i{}_\mu = c^i{}_\mu{}^\nu \boldsymbol{G}^0{}_\nu \tag{48.6}$$

という形にかくことができる．係数 $c^i{}_\mu{}^\nu$ は $g^{\mu\nu}$ あるいは $g_{\mu\nu}$ だけの関数で

ある．

そこで，Bianchi の恒等式

$$\nabla_\nu \boldsymbol{G}^\nu{}_\mu \equiv \partial_\nu \boldsymbol{G}^\nu{}_\mu - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\mu} \boldsymbol{G}^\alpha{}_\rho g^{\rho\beta} \equiv 0$$

にこの関係式を代入すると

$$\partial_0 \boldsymbol{G}^0{}_\mu = -\partial_k (c^k{}_\mu{}^\nu \boldsymbol{G}^0{}_\nu) + \frac{1}{2} g^{\beta\rho} g_{0\beta,\mu} \boldsymbol{G}^0{}_\rho + \frac{1}{2} g^{\beta\rho} g_{k\beta,\mu} c^k{}_\rho{}^\sigma \boldsymbol{G}^0{}_\sigma .$$

これを形式的にまとめると

$$\partial_0 \boldsymbol{G}^0{}_\mu = - c^k{}_\mu{}^\nu \partial_k \boldsymbol{G}^0{}_\nu + b_\mu{}^\nu \boldsymbol{G}^0{}_\nu \tag{48.7}$$

という形になる．$b_\mu{}^\nu$ は $g_{\mu\nu}$ および $g_{\mu\nu,\lambda}$ だけの関数である．

そこで，S の上で $\boldsymbol{G}^0{}_\nu = 0$ が満たされていれば，(48.7) を解く際に，係数 c, b およびその x^0 に関するすべての階数の微係数が S 上で ∞ とならないかぎり，たとえそれらの正確な値を知らなくとも

$$\boldsymbol{G}^0{}_\nu = 0 \qquad (x^0 \geqq 0)$$

となる．

そこで Einstein の方程式に対する初期値問題を解く手順は，結局以下のようになる．

まず S 上のすべての点における $g_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu,0}$ の値を与える．ただしこれらは S の上で $G^0{}_\mu = 0$ を満足するようにする．

$g_{0\mu,00}$ は S の上で 0 ときめてよい．また $x^0 > 0$ の領域で $g_{0\mu}$ の値を勝手に与えてよい．ただしその値は S の上にあらかじめ与えた $g_{0\mu}$, $g_{0\mu,0}$, $g_{0\mu,00}$ の値となめらかにつながるように注意する．

$x^0 > 0$ の領域でも $G^0{}_\mu = 0$ がいたるところで成立していることは，上に与えた証明のとおりであるから心配無用である．

そこで (48.1) を g_{ik} に対する方程式と考えて，これを解けばよい．上にならべた準備が完了していれば，(48.1) を解くことは全く標準的な初期値問題にほかならないから，原理的にはこれで問題は落着したことになる．

このようにして求まった g_{ik} とあらかじめ与えた $g_{0\mu}$ を一緒にすれば，これで Einstein の方程式の答が求まる．

上のように述べると問題ははなはだ簡単のようにみえるが，実際にはそうはいかない．まず，勝手に与えた初期値がSの上で $G^0{}_\mu=0$ を満足するように調整する必要がある．第2に $R_{ik}=0$ を g_{ik} について解こうとするとき，この6個の方程式のみならず，常に4個の $G^0{}_\mu=0$ からの制限も考慮に入れる必要が起こる．そんなわけで，この方程式系の解の存在の証明はなかなかの難問である．解の存在の証明については次の文献を参照されたい．

Y. Fourès-Bruhat: L. Witten 監修の "*Gravitation: An Introduction to Current Research*" (New York, 1962) の中の The Cauchy Problem (pp. 130～168).

§49. Einstein の方程式の特有曲面

前節で初期値問題として Einstein の方程式を扱った際，初期値を与える超曲面S（これは $x^0=0$ にあたる）の上では g^{00} は決して0とはならず，いたるところで常に <0 と仮定した．しかしもしS上のある点で $g^{00}=0$ となるときは，方程式 (47.4a) からわかるように，$g_{ij,00}$ はこの点で不定となる．一般に $g_{ik,00}$ がある超曲面上のいたるところで不定とする．たとえばその面を境として，面の一方側から求めた $g_{ik,00}$ の値と，反対側から求めたそれの値とがくい違うような場合はまさにこの典型的な例である．もっと現実的にいえば，静的宇宙のなかで，突然，星が大爆発を起こしたとしよう．それにともなう重力場の擾乱は星を中心として次第に八方に広がる．この先端はちょうど，静かな水面の上を波が伝播するときの様子とよく似ているであろう．先端の一方の側では時空の曲率テンソルは時間的にはげしく変化するが，他の側では，それは爆発以前のままである．つまり擾乱の最先端面（時刻を指定すればこれは2次元曲面である）を境として内と外で，曲率テンソル（あるいは $g_{\mu\nu}$ の2階微係数）は不連続となっている．このような面を微分方程式 $R_{\mu\nu}=0$ の**特有曲面** (characteristic hyper-surface) という．

一般にある超曲面上のすべての点で，与えられた初期値に対してある偏微分方程式の解が一意的にきまらず，一般に無数の解が存在するとき，このような

超曲面を，その偏微分方程式の特有曲面という．Einstein の方程式では，もしSの上のすべての点で g^{00} が 0 ならば，S はまさに特有曲面である．

特有曲面を調べることは偏微分方程式の性格を知るのに非常に有効である．特に上に述べた星の例のように擾乱の伝播，つまり波動現象を調べるには大いに役に立つ．そこで Einstein の方程式の特有曲面を調べてみよう．

いまSを特有曲面とする．そこで，座標系を適当に選んで

$$x^0 = 0 \tag{49.1}$$

がSを表わす方程式であるとする．このような特別な座標系を採用すれば，初期値を与えてもこの面の上の $g_{ik,00}$ が不定となるための条件は，§47 で述べたように，$x^0=0$ において，任意の x^1, x^2, x^3 に対して

$$g^{00} = 0 \tag{49.2}$$

が成立するということになる．

(49.2) を一般の座標系を用いて表わしてみよう．一般系（これを x'-系としよう）と上述の特別な系（x-系）との間の関係を

$$x^\mu = f^\mu(x^{0\prime}, x^{1\prime}, x^{2\prime}, x^{3\prime}) \tag{49.3}$$

とする．まず，面 S を表わす式は，x'-系では

$$x^0 = f^0(x') = 0 \tag*{(49.1)$'$}$$

となる．また，(49.2) はテンソルの変換則の公式により

$$g^{00}(x) = \frac{\partial x^0}{\partial x^{\mu\prime}}\frac{\partial x^0}{\partial x^{\nu\prime}}\, g^{\mu\nu\prime}(x') = 0 \tag*{(49.2)$'$}$$

となる．f^0 を使えば

$$\frac{\partial f^0}{\partial x^{\mu\prime}}\frac{\partial f^0}{\partial x^{\nu\prime}}\, g^{\mu\nu\prime}(x') = 0. \tag*{(49.2)$''$}$$

これが $f^0(x')$ の満たすべき方程式である．

S の法線ベクトルを n_μ' とすれば

$$n_\mu'(x') \propto \frac{\partial f^0(x')}{\partial x^{\mu\prime}}$$

であるから，(49.2)$''$ は

$$n_\mu' n_\nu' g^{\mu\nu\prime}(x') = 0 \tag{49.4}$$

となる．つまりSの法線はすべてヌル・ベクトルである．いいかえればSはヌル曲面である．

方程式 (49.4) は，曲率テンソルがSを境として不連続であるという要請からも導くことができる．

いま，S上の任意の1点Pの近傍で座標系を適当にとり，前と同様に面Sを表わす方程式が $x^0=0$ とする．また x^0 軸は点Pで面Sに垂直とする．Sを境として一方の側の時空域をI，他の側をIIとする．$g_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu,\lambda}$ はSの上でも連続，したがって $g_{\mu\nu,\lambda k}$ も連続とする．式でかくと，たとえば

$$\varDelta g_{\mu\nu}(x) \overset{d}{\equiv} g_{\mu\nu}(x,\,\mathrm{I}) - g_{\mu\nu}(x,\,\mathrm{II}) = 0\,. \tag{49.5}$$

ここで $g_{\mu\nu}(x,\,\mathrm{I})$ とはIの側からS上の点 x に到達した場合の $g_{\mu\nu}$ の値を示す．$g_{\mu\nu}(x,\,\mathrm{II})$ も同様の意味をもつ．一方，$g_{\mu\nu,00}$ はSの上で不連続とする：

$$\varDelta g_{\mu\nu,00} \overset{d}{\equiv} g_{\mu\nu,00}(x,\,\mathrm{I}) - g_{\mu\nu,00}(x,\,\mathrm{II}) \neq 0\,. \tag{49.5$'$}$$

これを一般系（x'-系）を用いてかくと

$$\begin{aligned}\varDelta g_{\mu\nu,\alpha\beta}{}'(x') &\overset{d}{\equiv} g_{\mu\nu,\alpha\beta}{}'(x',\,\mathrm{I}) - g_{\mu\nu,\alpha\beta}{}'(x',\,\mathrm{II})\\ &= \frac{\partial f^0}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial f^0}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\nu'}}\varDelta g_{\rho\sigma,00}(x)\end{aligned}$$

あるいは

$$\begin{aligned}\varDelta_{\mu\nu}{}'(x') &\overset{d}{\equiv} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\nu'}}\varDelta g_{\rho\sigma,00}(x)\,,\\ n_\alpha{}' &\overset{d}{\equiv} \frac{\partial f^0(x')}{\partial x^{\alpha'}}\end{aligned} \tag{49.6}$$

とかくことにすれば

$$\varDelta g_{\mu\nu,\alpha\beta}{}'(x') = n_\alpha{}' n_\beta{}' \varDelta_{\mu\nu}{}'(x') \neq 0 \tag{49.7}$$

となる．しかし

$$\varDelta g_{\mu\nu,\alpha}{}'(x') = 0, \qquad \varDelta g_{\mu\nu}{}'(x') = 0$$

である．したがって

$$\varDelta \varGamma^\lambda{}_{\mu\nu}{}'(x') \overset{d}{\equiv} \varGamma^\lambda{}_{\mu\nu}{}'(x',\,\mathrm{I}) - \varGamma^\lambda{}_{\mu\nu}{}'(x',\,\mathrm{II}) = 0$$

となる．

(49.7) のために曲率テンソルはSで不連続となる（これからは一般系を表わす右肩の $'$ をすべてはぶくことにする）:

$$
\begin{aligned}
\Delta R^{\alpha}{}_{\beta,\mu\nu} &= \Delta(\partial_\mu \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}) \\
&= \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda}(n_\beta n_\mu \Delta_{\lambda\nu} - n_\lambda n_\mu \Delta_{\beta\nu} - n_\beta n_\nu \Delta_{\lambda\mu} + n_\lambda n_\nu \Delta_{\mu\beta}) \\
&= 2 g^{\alpha\lambda} n_{[\mu}\Delta_{\nu][\lambda} n_{\beta]} \neq 0. \qquad (49.8)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
n_{[\mu}\Delta_{\nu]\lambda} \overset{d}{\equiv} \frac{1}{2}(n_\mu \Delta_{\nu\lambda} - n_\nu \Delta_{\mu\lambda})
$$

を意味する.

また，Einstein の方程式については

$$
R_{\mu\nu}(x, \mathrm{I}) = 0, \qquad R_{\mu\nu}(x, \mathrm{II}) = 0
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\Delta R_{\mu\nu}(x) &= \Delta R^{\alpha}{}_{\nu\mu\alpha} \\
&= \frac{1}{2}\{n_\mu n_\nu g^{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\beta} - n_\mu n^\alpha \Delta_{\alpha\nu} - n_\nu n^\alpha \Delta_{\alpha\mu} + n_\alpha n_\beta g^{\alpha\beta}\Delta_{\mu\nu}\} = 0. \qquad (49.9)
\end{aligned}
$$

この両辺に n_ρ, n_σ を掛け μ と ρ, ν と σ を反対称化すると，上の最後の項だけ残り

$$
\frac{1}{2} n_\alpha n_\beta g^{\alpha\beta} n_{[\rho}\Delta_{\mu][\nu} n_{\sigma]} = 0\,.
$$

そこでSの上では

$$
(n_\alpha n_\beta g^{\alpha\beta})\Delta R_{\rho\mu\nu\sigma} = 0 \qquad (49.10)
$$

となる．したがって，$\Delta R_{\rho\mu\nu\sigma}$ が0でないためには

$$
n_\alpha n_\beta g^{\alpha\beta} = 0 \qquad (49.11)
$$

が必要である．つまり，Sの法線がいたるところでヌル・ベクトルのときに限り曲率テンソルが不連続になるということが起こりうる.

(49.11) を使うと，(49.9) の最後の項は0となり

$$
\Delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\{n_\mu n_\nu g^{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\beta} - n_\mu n^\alpha \Delta_{\alpha\nu} - n_\nu n^\alpha \Delta_{\alpha\mu}\} = 0 \qquad (49.12)
$$

となる．この両辺に n_λ を掛けて $[\lambda, \mu]$ について反対称化すると

$$n_{[\lambda}\Delta R_{\mu]\nu} = -\frac{1}{2}n_\nu n^\alpha \Delta_{\alpha[\mu}n_{\lambda]} = 0\,,$$

あるいは

$$n^\alpha\{\Delta_{\alpha\mu}n_\lambda - \Delta_{\alpha\lambda}n_\mu\} = 0\,. \tag{49.13}$$

いま

$$\psi_\mu \overset{d}{\equiv} \Delta_{\mu\alpha}n^\alpha \tag{49.14}$$

とかくことにすれば，(49.13) は

$$n_\lambda\psi_\mu - n_\mu\psi_\lambda = 0 \tag{49.13$'$}$$

となる．つまり

$$\frac{\psi_\mu}{n_\mu} = \frac{\psi_\lambda}{n_\lambda} = (\lambda,\ \mu \text{ に無関係な量}) = K \tag{49.13$''$}$$

となる (λ, μ について和をとるな)．したがって

$$\psi_\mu = Kn_\mu\,. \tag{49.15}$$

これを (49.12) に代入すると

$$n_\mu n_\nu g^{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\beta} - 2Kn_\mu n_\nu = 0\,.$$

つまり

$$K = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\beta} \tag{49.16}$$

となる．そこで，(49.14)，(49.16) を (49.15) に代入すると

$$\left(\Delta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}\right)n^\nu = 0\,. \tag{49.15$'$}$$

したがって，特有曲面 S (したがって n^ν) がわかっているとき，S 上における不連続量 $\Delta_{\mu\nu}$ は勝手な値をとるわけにはいかない． それは少くとも (49.15)$'$ を満足する必要がある．

特有曲面の例を 2 つ示そう．前にでてきた Schwarzschild の時空を考えてみよう．この ds^2 は (36.5)$'$ で与えられている．

いま，Schwarzschild の特異面

$$r - a = 0$$

を考えてみよう．この n_μ は，$x^1 = r$，$x^2 = \theta$，$x^3 = \varphi$ とすると，

$$n_1 = 1, \qquad \text{その他の } n_\mu = 0.$$

したがって

$$n_\mu n_\nu g^{\mu\nu} = g^{11} = \frac{1}{g_{11}} = \left(1 - \frac{a}{r}\right)_{r=a} = 0.$$

つまり，Schwarzschild の特異面は Schwarzschild の時空の特有曲面である．

もうひとつの例として Kerr の解（46.1）を考えてみよう．この場合

$$\rho^2 - a\rho + h^2 = 0$$

で与えられる曲面 S_0 は §46 でも示したようにヌル曲面である．したがってこれも Kerr の時空の特有曲面である．

さて，ここで重力波に関して §35 に述べた種々の関係式と，本節で与えた特有曲面における $g_{\mu\nu,\rho\sigma}$ の "とびだか" $n_\rho n_\sigma \Delta_{\mu\nu}$ に関する関係式との著しい類似性について一言ふれよう．まず（35.12）は本節の（49.8）に，また(35.14), (35.15)′ はそれぞれ，（49.11）および（49.15)′ に対応する．さらに（35.16）に対応して

$$\Delta R_{\mu\nu\rho\sigma} n^\sigma = 0 \tag{49.17}$$

が成り立つ．（49.17）は，（49.8）に n^ν を掛け，(49.15)′ を使えば容易に証明できる．このように $g_{\mu\nu}$ の2階微分の不連続性は波動域における［(35.9), (35.10), (35.11）の意味での］重力波と全く同じ振舞をする．

§50. 局所 Lorentz 系

重力波の話（§35）の際にふれたように，曲率テンソルの代数的構造を調べることは，時空の特性を知るのにきわめて有意義なことである．そこでこれから時空内の任意の1点Pにおける曲率テンソルの代数的性質を調べよう．

ところで，たとえ点Pを指定しても，座標系を変えればテンソルの各成分の値は変わる．時空の幾何学的性質として重要なものは，座標系のとりかたに依存しない不変なものでなければならない．そこで，20個の独立な成分をもつ $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ から導かれる不変量についてその性質を調べる必要がある．それにはまず点Pを原点として，4個の互いに直交するベクトルを考え，これらを座標軸

とする局所 Lorentz 系を設置するがよい．4個のベクトル* を

$$h_a{}^\mu \qquad (a=0,1,2,3) \tag{50.1}$$

とする．これから本節ではギリシャ字の添字は一般座標系に関するベクトルやテンソルの成分を表わすものとする．一方，ラテン字は局所 Lorentz 系の座標軸を示す番号に使う．(50.1) の下つき添字 a は4個のベクトルを識別するための番号である．

$h_a{}^\mu$ が大きさ1をもち，互いに直交するベクトルであることはつぎの式で表わされる：

$$g_{\mu\nu}h_a{}^\mu h_b{}^\nu \overset{d}{\equiv} \eta_{ab} = \begin{cases} 1: & a=b=1,2,3 \\ 0: & a\neq b \\ -1: & a=b=0. \end{cases} \tag{50.2}$$

$g_{\mu\nu}$ は点 P における計量テンソルである．(50.2) からわかるように4個のベクトルのなかで h_0 だけが時間的ベクトル，他の3個は空間的である．

ラテン字の上げ下ろしには η^{ab}, η_{ab} を用い，ギリシャ字の上げ下ろしには $g^{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ を使うことにすれば，(50.2) は

$$h^{a\mu}h_{b\mu}=\delta^a{}_b \tag{50.2$'$}$$

となる．ここで2個の 4×4 行列 $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{h}'$ を

$$(a|\boldsymbol{h}|\mu)\overset{d}{\equiv}h^{a\mu}, \qquad (\mu|\boldsymbol{h}'|b)\overset{d}{\equiv}h_{b\mu}$$

により定義する．これを使うと (50.2)$'$ は

$$(a|\boldsymbol{h}|\mu)(\mu|\boldsymbol{h}'|b)=(a|\boldsymbol{1}|b).$$

この両辺に $\boldsymbol{h}^{-1}$ を左から掛けると

$$(\nu|\boldsymbol{h}^{-1}|a)\cdot(a|\boldsymbol{h}|\mu)(\mu|\boldsymbol{h}'|b)=(\nu|\boldsymbol{h}^{-1}|a)(a|\boldsymbol{1}|b).$$

すなわち

$$(\nu|\boldsymbol{h}'|b)=(\nu|\boldsymbol{h}^{-1}|b)$$

となる．この両辺に右から $(b|\boldsymbol{h}|\mu)$ を掛けると

$$(\nu|\boldsymbol{h}'|b)(b|\boldsymbol{h}|\mu)=(\nu|\boldsymbol{1}|\mu).$$

---

* この4個のベクトルをひとまとめにして，ドイツ語で **Vierbein**，英語で **tetrad** という．

あるいは

$$h_{b\nu}h^{b\mu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} \tag{50.3}$$

となる．$g_{\mu\rho}$ を掛けると

$$h_{b\nu}h^{b}{}_{\rho} = g_{\nu\rho}\,. \tag*{(50.3)$'$}$$

(50.2)〜(50.3)′ は h と g の間の関係を与える重要な関係式である．

さて，$g_{\mu\nu}(P)$ が与えられていても (50.2)〜(50.3)′ を満たす $h_{a\mu}$ は一通りにはきまらない．たとえば，$h^{a}{}_{\mu}$ に対して Lorentz 変換

$$h^{a}{}_{\mu} \rightarrow h^{a}{}_{\mu}{}' = a^{a}{}_{b}h^{b}{}_{\mu} \tag{50.4}$$

を行ったとする．これに対して (50.2)〜(50.3)′ は不変である．このように h の選択には (50.4) のような自由度が残る．

さて，点Pにおける任意の一般テンソル（本節では一般座標変換に対してテンソルとして振舞う量を一般テンソル，これに対して Lorentz 変換に対してのみテンソルとなるものを Lorentz テンソルとよぶことにする）を考えよう．それをたとえば $T^{\mu}{}_{\nu}(P)$ とする．これに対して

$$T^{a}{}_{b} \overset{d}{\equiv} h^{a}{}_{\mu}h_{b}{}^{\nu}T^{\mu}{}_{\nu}(P) \tag{50.5}$$

という 16 個の量を作ることができる．これらは一般変換に対してはすべて不変である．しかし Lorentz 変換 (50.4) に対しては Lorentz テンソルである．

この手続にしたがえば

$$dX^{a} \overset{d}{\equiv} h^{a}{}_{\mu}dx^{\mu} \tag{50.6}$$

とするとき，(50.3)′ により

$$ds^{2} = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = \eta_{ab}h^{a}{}_{\mu}h^{b}{}_{\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = \eta_{ab}dX^{a}dX^{b} \tag{50.7}$$

となる．つまり，$h_{a}{}^{\mu}$ は確かに局所 Lorentz 系を構成している．

(50.5) を応用すると，一般テンソルである $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ から 20 個の不変量

$$R_{abcd} \overset{d}{\equiv} h_{a}{}^{\mu}h_{b}{}^{\nu}h_{c}{}^{\rho}h_{d}{}^{\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} \tag{50.8}$$

を作ることができる．これがわれわれのほしかったものである．これは添字について，もとの $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ と同じ対称性をもった Lorentz テンソルである．この Lorentz テンソルの性質を調べることがわれわれの目的である．これは Loren-

tz 変換に対して線形変換をこうむる．しかしこの変換は Lorentz 変換の既約表現ではない．そこで R_{abcd} を既約部分に分解するということがまず第一になすべき仕事である．それには次節に述べるスピノール表現が大変便利である．それればかりでなく曲率テンソルをスピノールでかき表わすと，それを“標準分解”することにより局所 Lorentz 系の選び方や，一般座標系のとり方に無関係な時空の幾何学的性質をひきだすことができる．そこで，ちょっとわずらわしいがスピノールの話を必要最小限の範囲で以下に説明する．

§51. スピノール算

いま，2個の成分をもつ量 $\xi^A (A=1, 2)$ を考えよう．これから本章のおわりまで，大文字のラテン添字は 1, 2 を表わすものとする．また，小文字のラテン添字は Lorentz テンソルの成分を表わす．なお，テンソル成分を表わす添字と同様に，大文字のラテン添字についても 同一の項の中に上下に同一の文字がでてきたときは，それについて 1 から 2 まで和をとるものとする．

さて，1次変換

$$\xi^A \to \xi^{A'} = C^A{}_B \xi^B \tag{51.1}$$

を考える．ここで $C^A{}_B$ は2行2列の行列の (A, B) 要素を示す．これは任意の複素数でよいが，唯一の条件は

$$\det(C^A{}_B) = \begin{vmatrix} C^1{}_1 & C^1{}_2 \\ C^2{}_1 & C^2{}_2 \end{vmatrix} = 1 \tag{51.2}$$

である．このような変換の全体は2次元 **unimodular 群** とよばれる群をなす.*
この群に属する変換に対して (51.1) のように変換される ξ^A を**反変スピノール**という．

任意の2個の反変スピノール ξ^A, η^A があるとき，これらの成分から行列

$$\varDelta \overset{d}{\equiv} \begin{pmatrix} \xi^1 & \eta^1 \\ \xi^2 & \eta^2 \end{pmatrix}$$

を作ると，これは変換 (51.1) により

* この群は $SL(2c)$ という記号で表わされる．

$$\boldsymbol{\varDelta} \to \boldsymbol{\varDelta}' = \begin{pmatrix} \xi^{1'} & \eta^{1'} \\ \xi^{2'} & \eta^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^1{}_1 & C^1{}_2 \\ C^2{}_1 & C^2{}_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\varDelta}$$

となる．両辺の行列式を計算すると

$$\det(\boldsymbol{\varDelta}') = \det(C^A{}_B)\cdot\det\boldsymbol{\varDelta}.$$

条件（51.2）を使うと

$$\det(\boldsymbol{\varDelta}) = \det(\boldsymbol{\varDelta}').$$

すなわち

$$\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1$$

は変換（51.2）に対して不変である．そこで

$$\eta_1 \overset{d}{\equiv} -\eta^2, \qquad \eta_2 \overset{d}{\equiv} \eta^1 \tag{51.3}$$

により定義された新しい2成分量 η_A を考えると

$$\xi^A\eta_A = \xi^{A'}\eta_A{}'$$

となる．

いま，特別な2行2列の行列

$$(\epsilon_{AB}) \overset{d}{\equiv} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{pmatrix} \overset{d}{\equiv} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{51.4}$$

を考えよう．これを使うと（51.3）は

$$\eta_A = \eta^B\epsilon_{BA} = -\epsilon_{AB}\eta^B \tag{51.3$'$}$$

となる．あるいは（51.4）と全く同じ形の行列

$$(\epsilon^{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{51.4$'$}$$

を使うと，（51.3）は

$$\eta^A = \epsilon^{AB}\eta_B \tag{51.3$''$}$$

とかくこともできる．

変換（51.1）に対して η_A の変換は

$$\eta_A \to \eta_A{}' = -(\epsilon_{AB}C^B{}_C\epsilon^{CD})\eta_D = \eta_D(C^{-1})^D{}_A \tag{51.5}$$

である．このような変換をこうむる量を **共変スピノール** という．

いま ξ^A に複素共役な量を

$$\overline{(\xi^A)} \stackrel{d}{\equiv} \bar{\xi}^{\dot{A}} \qquad (\dot{A} = \dot{1},\ \dot{2})$$

で表わすことにする.* これは変換 (51.1) に対応して

$$\bar{\xi}^{\dot{A}} \to (\bar{\xi}^{\dot{A}})' = (\overline{C^A{}_B \xi^B})$$

となる. あるいは

$$(\overline{C})^{\dot{A}}{}_{\dot{B}} \stackrel{d}{\equiv} (\overline{C^A{}_B})$$

とかくことにすれば, $\bar{\xi}^{\dot{A}}$ の変換は

$$\bar{\xi}^{\dot{A}} \to (\bar{\xi}^{\dot{A}})' = (\overline{C})^{\dot{A}}{}_{\dot{B}}\, \bar{\xi}^{\dot{B}} \tag{51.6}$$

となる. 一般に, ある2成分量 ζ が (51.6) のように変換されるとき, その成分を $\zeta^{\dot{A}}$ で表わす. 添字に・がついているときは, その変換は (51.6) と同じ形であることを表わす. すなわち

$$\zeta^{\dot{A}} \to (\zeta^{\dot{A}})' = (\overline{C})^{\dot{A}}{}_{\dot{B}}\, \zeta^{\dot{B}}. \tag{51.6$'$}$$

以上のように, スピノールには反変, 共変の区別のほかに, さらに (51.1) 型と, それに複素共役な (51.6) 型とがある. たとえば, $\zeta_{\dot{A}}$ の変換則は

$$\zeta_{\dot{A}} \to (\zeta_{\dot{A}})' = -\,\epsilon_{\dot{A}\dot{B}} (\overline{C})^{\dot{B}}{}_{\dot{C}}\, \epsilon^{\dot{C}\dot{D}}\, \zeta_{\dot{D}}$$

である. ここで $\epsilon^{\dot{A}\dot{B}}$ は ϵ_{AB} の複素共役 (つまり ϵ_{AB} と全く同じもの) を表わす.

なお, ベクトルから高階のテンソルという概念が導入されたように, 高階スピノールも以下のように定義できる. 例として4階**混合スピノール** ψ の変換則を下に与える:

$$\psi^{AB}{}_C{}^{\dot{D}} \to (\psi^{AB}{}_C{}^{\dot{D}})' = C^A{}_E C^B{}_F (-\, C_C{}^G)(\overline{C})^{\dot{D}}{}_{\dot{H}}\, \psi^{EF}{}_G{}^{\dot{H}}.$$

ここで

$$C_C{}^G \stackrel{d}{\equiv} \epsilon_{CA} C^A{}_B \epsilon^{BG} = -\,(C^{-1})^G{}_C.$$

なお, スピノール算にでてくる縮約はテンソル算のそれと異なりつぎの点に注意する必要がある.

$$\xi_A \eta^A = \xi^B \epsilon_{BA} \eta^A = -\,\xi^B \eta_B.$$

特に $\xi = \eta$ のときは

$$\xi_A \xi^A = \epsilon_{BA} \xi^B \xi^A = 0 \tag{51.7}$$

---

* 任意の量 F の複素共役を $\overline{F}$ で表わすことにする.

である．

つぎにスピノールと Lorentz ベクトルとの関係について述べよう．まず，2×2 行列 $\boldsymbol{\sigma}^k$ をつぎのように定義する：

$$\left.\begin{aligned}(\sigma^0)_{A\dot{B}} &\overset{d}{\equiv}\begin{pmatrix}(\sigma^0)_{1\dot{1}} & (\sigma^0)_{1\dot{2}}\\ (\sigma^0)_{2\dot{1}} & (\sigma^0)_{2\dot{2}}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\\ (\sigma^1)_{A\dot{B}} &\overset{d}{\equiv}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad (\sigma^2)_{A\dot{B}}\overset{d}{\equiv}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\\ (\sigma^3)_{A\dot{B}} &=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.\end{aligned}\right\}\tag{51.8}$$

添字 $A\dot{B}$ を上にあげるには (51.3) に従えばよい．その結果はつぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned}(\sigma^0)^{A\dot{B}}&=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad (\sigma^1)^{A\dot{B}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\\ (\sigma^2)^{A\dot{B}}&=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\qquad (\sigma^3)^{A\dot{B}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}\right\}\tag{51.8$'$}$$

そこでつぎの関係が成り立つことが容易にわかる：

$$\left.\begin{aligned}(\sigma^k)^{A\dot{B}}(\sigma_l)_{A\dot{B}}&=(\sigma^k)_{A\dot{B}}(\sigma_l)^{A\dot{B}}=-\delta^k{}_l,\\ (\sigma^k)^{A\dot{B}}(\sigma_k)_{C\dot{D}}&=(\sigma_k)^{A\dot{B}}(\sigma^k)_{C\dot{D}}=-\delta^A{}_C\delta^{\dot{B}}{}_{\dot{D}}.\end{aligned}\right\}\tag{51.9}$$

さて，4個の成分をもつ量 $v^k(k=0,1,2,3)$ を考えよう．v^k から2階スピノール $v^{A\dot{B}}$ を

$$v^{A\dot{B}}\overset{d}{\equiv}v^k(\sigma_k)^{A\dot{B}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}v^0-v^3 & -v^1-iv^2\\ -v^1+iv^2 & v^0+v^3\end{pmatrix}\tag{51.10}$$

のように作る．いま，$v^{A\dot{B}}$ が変換 (51.1) に対応して

$$v^{A\dot{B}}\to(v^{A\dot{B}})'=C^A{}_C\cdot(\overline{C})^{\dot{B}}{}_{\dot{D}}v^{C\dot{D}}\tag{51.11}$$

のように変換されたとする．いま*

$$(\overline{C})^{\dot{B}}{}_{\dot{D}}\overset{d}{\equiv}(\overline{C}^T)_{\dot{D}}{}^{\dot{B}}\overset{d}{\equiv}(C^\dagger)_{\dot{D}}{}^{\dot{B}}$$

---

* † はエルミット共役な行列を示す．

とかくことにすれば (51.11) は行列の形にかくことができる：

$$(v')^{A\dot{B}} = (C)^{A}{}_{C}(v)^{C\dot{D}}(C^{\dagger})_{\dot{D}}{}^{\dot{B}}.$$

これを２行２列のマトリックスの間の関係とみなし，その行列式をとると

$$\det(\boldsymbol{v}') = \det(\boldsymbol{C})\det(\boldsymbol{v})\det(\boldsymbol{C}^{\dagger}).$$

(51.2) を思い起こすと

$$\det(\boldsymbol{v}') = \det(\boldsymbol{v}). \tag{51.12}$$

いま

$$v^{k\prime} \overset{d}{\equiv} -(\sigma^{k})_{A\dot{B}}(v^{A\dot{B}})' \tag{51.13}$$

とおけば，両辺に $(\sigma_k)^{C\dot{D}}$ を掛け (51.9) を使うと

$$(\sigma_k)^{C\dot{D}}v^{k\prime} = (v^{C\dot{D}})' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} v^{0\prime} - v^{3\prime} & -v^{1\prime} - iv^{2\prime} \\ -v^{1\prime} + iv^{2\prime} & v^{0\prime} + v^{3\prime} \end{pmatrix} \tag{51.10$'$}$$

となる．(51.10)，(51.10)′ を (51.12) に代入すると

$$\eta_{ik}v^{i\prime}v^{k\prime} = \eta_{ik}v^{i}v^{k}. \tag{51.14}$$

一方，(51.13) に (51.11)，(51.10) を代入すると

$$v^{k\prime} = a^{k}{}_{l}v^{l} \tag{51.15}$$

とかくことができる．ここで

$$a^{k}{}_{l} \overset{d}{\equiv} -(\sigma^{k})_{A\dot{B}}C^{A}{}_{C}(\overline{C})^{\dot{B}}{}_{\dot{D}}(\sigma_{l})^{C\dot{D}} \tag{51.16}$$

である．行列 $\boldsymbol{\sigma}^{k}$ がエルミット行列であること，すなわち

$$\overline{\{(\sigma^{k})_{A\dot{B}}\}} = (\sigma^{k\dagger})_{B\dot{A}} = (\sigma^{k})_{B\dot{A}}$$

という性質を使うと $a^{k}{}_{l}$ が実数であることも証明できる．(51.15)，(51.14) から，変換 (51.1) が v^{k} に対して Lorentz 変換

$$v^{k} \to v^{k\prime} = a^{k}{}_{l}v^{l}$$

を引き起こすことがわかる．これはまた v^{k} が反変ベクトルの変換則に従うことを示すものである．

以上をまとめると，Lorentz ベクトル v^{k} には２階スピノール $v^{A\dot{B}}$ が対応し，それは (51.10) により，v^{k} から一意的に決定される．逆に任意の２階スピノール $w^{A\dot{B}}$ から

$$w^k \overset{d}{\equiv} -(\sigma^k)_{A\dot{B}}\, w^{A\dot{B}} \tag{51.17}$$

により Lorentz ベクトルが導かれる．また，スピノール変換（51.1）に対応して Lorentz 変換も一意的にきまる．Lorentz 変換の係数 $a^k{}_l$ は（51.16）により与えられる．もし $C^A{}_B$ の代りに $-C^A{}_B$ としても，$a^k{}_l$ は同じものになる．したがって1個の Lorentz 変換には必ず $\pm C$ という1対のスピノール変換が対応する．このことから逆に1階のスピノールは Lorentz 変換の2価表示を与えるということがわかる．さらにこの考えを拡張すると，一般に n 階の混合スピノールも Lorentz 群のある表示をあたえることがわかる．その際，もし n が奇数なら2価表示，偶数ならば，1価表示となることもさきに述べたことから容易に理解できよう．特に n 階スピノール

$$\psi_{AB\cdots N} \quad （または \quad \psi^{AB\cdots N}）$$

が添字のすべての置換に対して完全対称のとき，変換（51.1）に対応する，このスピノールの変換係数は Lorentz 群の既約表示をあたえる．このようなスピノールを**既約スピノール**という．これに複素共役な変換をこうむる完全対称スピノール

$$\psi_{\dot{A}\dot{B}\cdots\dot{N}}$$

もまた既約スピノールである．一般に

$$\psi_{(AB\cdots N)(\dot{U}\dot{V}\cdots\dot{Z})}$$

が $AB\cdots N$ および $\dot{U}\dot{V}\cdots\dot{Z}$ のそれぞれについて完全対称なとき，それは既約スピノールである．

いかなる高階混合スピノールも，ϵ_{AB}, ϵ^{AB} を適当に用いていくつかの既約スピノールの和に必ず分解できる．これを証明する代りに簡単な例をつぎに示そう．

ψ_{ABC} は3階の任意のスピノールとし，添字は何らの対称性も持たないとする．したがってこの独立成分の総数は $2^3=8$ 個（の複素量）である．いま

$$\psi_{(ABC)} = \frac{1}{3!}\sum\nolimits_{\rm perm}\psi_{ABC}$$

とおく．$\sum$ は添字 ABC のすべての置換についての和を示す．これは完全対

称スピノールである．さらに

$$\chi_A \stackrel{d}{\equiv} \frac{1}{2}\epsilon^{BC}\psi_{ABC}, \qquad \phi_C \stackrel{d}{\equiv} \frac{1}{2}\epsilon^{AB}\psi_{ABC}$$

とおけば

$$\psi_{ABC} = \psi_{(ABC)} + \chi_A\epsilon_{BC} + \frac{2}{3}(\epsilon_{AB}\phi_C + \epsilon_{AC}\phi_B) + \frac{1}{3}(\epsilon_{AC}\chi_B + \epsilon_{AB}\chi_C).$$

ここで $\psi_{(ABC)}$, χ_A, ϕ_C はいずれも既約スピノールである．これらの独立成分の数はそれぞれ，4, 2, 2 であるからその総和は 8 となり，もとの ψ_{ABC} の独立成分の数と一致している．

もうひとつの例として $\psi_{(AB)(CD)}$ を考える．これは (A, B), (C, D) のそれぞれについて対称とする．さらに

$$\psi_{(AB)(CD)} = \psi_{(CD)(AB)}$$

とする．これを既約スピノールに分解してみよう．その前にひとつ定理を述べておく．

定理 10. 任意のスピノール $\psi_{A\cdots B\cdots}$ が A と B の置換に対して反対称のときは

$$\psi_{A\cdots B\cdots} = \epsilon_{AB}\chi_{\cdots}$$

とかくことができる．ここで $\chi_{\cdots}$ は

$$\chi_{\cdots} \stackrel{d}{\equiv} \frac{1}{2}\epsilon^{AB}\psi_{A\cdots B\cdots}$$

である．(これの正しいことは証明するまでもなく自明であろう．)

さて

$$\psi_{(AB)(CD)} = \frac{1}{3}\{\psi_{(AB)(CD)} + \psi_{(AC)(BD)} + \psi_{(AD)(CB)}\}$$

$$+ \frac{1}{3}\{\psi_{(AB)(CD)} - \psi_{(AC)(BD)}\} + \frac{1}{3}\{\psi_{(AB)(CD)} - \psi_{(AD)(CB)}\}.$$

この第 1 項は $(ABCD)$ について完全対称であるから，これを $\psi_{(ABCD)}$ とかく．第 2 項は上の定理を使うと

$$\frac{1}{3}\{\psi_{(AB)(CD)} - \psi_{(AC)(BD)}\} = \epsilon_{AD}\epsilon_{BC}\chi$$

となる．ここで

$$\chi \overset{d}{\equiv} \frac{1}{6}\psi_{(AB)}{}^{(AB)} = \frac{1}{6}\epsilon^{AD}\epsilon^{BC}\psi_{(AB)(CD)}\,. \tag{51.18}$$

同様に第3項は

$$\epsilon_{AC}\epsilon_{BD}\chi$$

となる．したがって

$$\psi_{(AB)(CD)} = \psi_{(ABCD)} + (\epsilon_{AD}\epsilon_{BC} + \epsilon_{AC}\epsilon_{BD})\chi \tag{51.19}$$

となる．左辺は6個の独立な複素成分をもつ．右辺の第1項は5個，χ は1個の複素量である．左右の独立成分の数は確かに等しい．第1の例の結果も全く同様の方法で導くことができる．

§ 52．特別なテンソルのスピノール表現

これから後で必要になる特別なテンソルのスピノール表現を調べてみよう．

まず，ベクトル v^k には

$$v_{A\dot{B}} \equiv v^k(\sigma_k)_{A\dot{B}}$$

が対応する．特に v^k が実数のときは

$$(\overline{v_{A\dot{B}}}) = v^k\overline{\{(\sigma_k)_{A\dot{B}}\}} = v^k(\sigma_k{}^\dagger)_{B\dot{A}}\,.$$

ところで，行列 $\boldsymbol{\sigma}_k$ はエルミット行列であるから

$$\bar{v}_{\dot{A}B} \overset{d}{\equiv} (\overline{v_{A\dot{B}}}) = v^k(\sigma_k)_{B\dot{A}} = v_{B\dot{A}}\,.$$

すなわち，実ベクトルのスピノール表現は

$$\bar{v}_{\dot{A}B} = v_{B\dot{A}} \tag{52.1}$$

を満足する．

v^k がヌル・ベクトルのときは，(51.9) により

$$v_{A\dot{B}}v^{A\dot{B}} = v_k v^l(\sigma^k)_{A\dot{B}}(\sigma_l)^{A\dot{B}} = -v_k v^k = 0\,.$$

一方，

$$v_{A\dot{B}}v^{A\dot{B}} = \epsilon^{AC}\epsilon^{\dot{B}\dot{D}}v_{A\dot{B}}v_{C\dot{D}} = 2(v_{1\dot{1}}v_{2\dot{2}} - v_{1\dot{2}}v_{2\dot{1}}).$$

したがって

$$\frac{v_{1\dot{1}}}{v_{2\dot{1}}}=\frac{v_{1\dot{2}}}{v_{2\dot{2}}}=\frac{\alpha_1}{\alpha_2},$$

$$\frac{v_{1\dot{1}}}{v_{1\dot{2}}}=\frac{v_{2\dot{1}}}{v_{2\dot{2}}}=\frac{\beta_{\dot{1}}}{\beta_{\dot{2}}}.$$

そこで

$$v_{A\dot{B}}=\lambda\alpha_A\beta_{\dot{B}}$$

となる．特に v^k が実ベクトルならば，(52.1) から

$$v_{A\dot{B}}=\lambda\alpha_A\bar{\alpha}_{\dot{B}}, \qquad \lambda=\text{実数}$$

となる．あるいは $\sqrt{\lambda}\alpha$ をあらためて α とかけば，実数のヌル・ベクトルは，一般に

$$v_{A\dot{B}}=\alpha_A\bar{\alpha}_{\dot{B}} \tag{52.2}$$

とかくことができる．ここで $\bar{\alpha}_{\dot{B}}\overset{d}{\equiv}(\overline{\alpha_B})$ である．

実数の2階反対称テンソル f_{kl} には

$$F_{[A\dot{X},B\dot{Y}]}\overset{d}{\equiv}f_{kl}(\sigma^k)_{A\dot{X}}(\sigma^l)_{B\dot{Y}}=-F_{[B\dot{Y},A\dot{X}]}$$

が対応する．これも前節に述べた定理を使って既約スピノールに分解できる：

$$F_{[A\dot{X},B\dot{Y}]}=\epsilon_{AB}\phi_{(\dot{X}\dot{Y})}+\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}}\chi_{(AB)}.$$

ここで，ϕ, χ は完全対称スピノール，したがって既約スピノールである．$\phi_{(\dot{X}\dot{Y})}$ は

$$\epsilon^{AB}F_{[A\dot{X},B\dot{Y}]}\overset{d}{\equiv}2\phi_{(\dot{X}\dot{Y})}$$

により与えられる．同様に

$$\chi_{(AB)}\overset{d}{\equiv}\frac{1}{2}\epsilon^{\dot{X}\dot{Y}}F_{[A\dot{X},B\dot{Y}]}$$

である．

ところで f_{kl} が実数であるから

$$(\overline{F_{[A\dot{X},B\dot{Y}]}})=F_{[X\dot{A},Y\dot{B}]}$$

となる．すなわち

$$\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}(\overline{\phi_{(\dot{X}\dot{Y})}})+\epsilon_{XY}(\overline{\chi_{(AB)}})=\epsilon_{XY}\phi_{(\dot{A}\dot{B})}+\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\chi_{(XY)}.$$

したがって

$$\phi_{(\dot{A}\dot{B})} = (\overline{\chi_{(AB)}}) \overset{d}{\equiv} \bar{\chi}_{\dot{A}\dot{B}} \,. \tag{52.3}$$

そこで

$$F_{[A\dot{X},B\dot{Y}]} = \epsilon_{AB}\bar{\chi}_{(\dot{X}\dot{Y})} + \epsilon_{\dot{X}\dot{Y}}\chi_{(AB)} \tag{52.4}$$

となる．もとの f_{kl} は6個の実数の成分をもつ．これに対して $\chi_{(AB)}$ は3個の複素成分をもつ．したがって，その実部と虚部が独立であることを思えば，(52.4) の右辺の独立な実数成分の数は f_{kl} と同数となる．

つぎに，以下のような対称性をもつ実数のテンソルを考えよう：

$$B_{[ab][cd]} = -B_{[ba][cd]} = -B_{[ab][dc]}\,, \tag{52.5}$$

$$B_{[ab][cd]} = B_{[cd][ab]}\,. \tag{52.5$'$}$$

いま，

$$B_{[A\dot{U},B\dot{V}][C\dot{X},D\dot{Y}]} \overset{d}{\equiv} B_{[a,b][c,d]}(\sigma^a)_{A\dot{U}}(\sigma^b)_{B\dot{V}}(\sigma^c)_{C\dot{X}}(\sigma^d)_{D\dot{Y}}$$

とおけば，(52.5) の対称性から ((52.4) を手本にすると)

$$B_{[A\dot{U},B\dot{V}][C\dot{X},D\dot{Y}]} = \epsilon_{AB}\epsilon_{CD}\phi_{(\dot{U}\dot{V})(\dot{X}\dot{Y})} + \epsilon_{\dot{U}\dot{V}}\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}}\psi_{(AB)(CD)} + \epsilon_{AB}\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}}\chi_{(\dot{U}\dot{V})(CD)} + \epsilon_{\dot{U}\dot{V}}\epsilon_{CD}\chi'_{(AB)(\dot{X}\dot{Y})} \tag{52.6}$$

という形になることがわかる．ここで (AB) のような，(　) の中の添字はいれかえに対して対称であることを示す．さらにもとのテンソルが実数であるために

$$(\overline{B_{[A\dot{U},B\dot{V}][C\dot{X},D\dot{Y}]}}) = B_{[U\dot{A},V\dot{B}][X\dot{C},Y\dot{D}]}$$

が成立する．その結果

$$\bar{\psi}_{(\dot{A}\dot{B})(\dot{C}\dot{D})} \overset{d}{\equiv} \{\overline{\psi_{(AB)(CD)}}\} = \phi_{(\dot{A}\dot{B})(\dot{C}\dot{D})}\,, \tag{52.7}$$

$$\bar{\chi}_{(UV)(\dot{C}\dot{D})} \overset{d}{\equiv} \{\overline{\chi_{(\dot{U}\dot{V})(CD)}}\} = \chi'_{(UV)(\dot{C}\dot{D})} \tag{52.8}$$

となる．

さらに (52.5)′ という対称性のために

$$\chi_{(\dot{X}\dot{Y})(AB)} = \chi'_{(AB)(\dot{X}\dot{Y})} \tag{52.9}$$

となる．(52.8) を考慮すると

$$\bar{\chi}_{(UV)(\dot{C}\dot{D})} = \{\overline{\chi_{(\dot{U}\dot{V})(CD)}}\} = \chi_{(\dot{C}\dot{D})(UV)}\,. \tag{52.10}$$

いま，$(\dot{C}\dot{D}) = (\dot{1}\dot{1}), (\dot{1}\dot{2}), (\dot{2}\dot{2})$ の代りに I, II, III, 同様に (UV) の (1, 1),

(1, 2), (2, 2) もそれぞれ I, II, III で表わすと，(52.9) は

$$\bar{\chi}_{MN} = \chi_{NM} \qquad (M, N = \mathrm{I, II, III}) \tag{52.11}$$

となる．つまり 3 × 3 行列 $\boldsymbol{\chi}$ はエルミット行列であることがわかる．

ところで (51.19) によれば，$\phi_{(\dot{U}\dot{V})(\dot{X}\dot{Y})}$，$\psi_{(AB)(CD)}$ はさらに既約スピノールに分解される：

$$\psi_{(AB)(CD)} = \psi_{(ABCD)} + (\epsilon_{AC}\epsilon_{BD} + \epsilon_{AD}\epsilon_{BC})S, \tag{52.12}$$

$$\phi_{(\dot{U}\dot{V})(\dot{X}\dot{Y})} = \bar{\psi}_{(\dot{U}\dot{V}\dot{X}\dot{Y})} + (\epsilon_{\dot{U}\dot{X}}\epsilon_{\dot{V}\dot{Y}} + \epsilon_{\dot{U}\dot{Y}}\epsilon_{\dot{V}\dot{X}})\bar{S}. \tag{52.12$'$}$$

ここで (52.12)′ を導くには (52.7) の関係を使った．(52.12) の S はスカラーであり，$\bar{S}$ は S の複素共役量である．S と $\psi_{(AB)(CD)}$ の関係は (51.18) から明らかである．

以上をまとめると，$B_{[ab][cd]}$ のスピノール表現はつぎのようになる：

$$\begin{aligned} B_{[A\dot{U},B\dot{V}][C\dot{X},D\dot{Y}]} = {} & \epsilon_{\dot{U}\dot{V}}\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}}\psi_{(ABCD)} + \epsilon_{AB}\epsilon_{CD}\bar{\psi}_{(\dot{U}\dot{V}\dot{X}\dot{Y})} \\ & + \epsilon_{AB}\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}}\chi_{(\dot{U}\dot{V})(CD)} + \epsilon_{\dot{U}\dot{V}}\epsilon_{CD}\chi_{(\dot{X}\dot{Y})(AB)} \\ & + \epsilon_{\dot{U}\dot{V}}\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}}(\epsilon_{AC}\epsilon_{BD} + \epsilon_{AD}\epsilon_{BC})S \\ & + \epsilon_{AB}\epsilon_{CD}(\epsilon_{\dot{U}\dot{X}}\epsilon_{\dot{V}\dot{Y}} + \epsilon_{\dot{U}\dot{Y}}\epsilon_{\dot{V}\dot{X}})\bar{S}. \end{aligned} \tag{52.13}$$

この式の右辺の各項のスピノールはすべて既約である．

独立成分の数をかぞえてみよう．$\psi_{(ABCD)}$ は 5 個の複素成分をもつから実数量としては 10 個の独立量をもつ．$\chi_{(\dot{U}\dot{V})(CD)}$ は 3 ×3 行列でエルミットであるから実数成分としては 9 個の独立量からなる．最後に S は 1 個の複素量であるから実数の独立成分は全部で 21 個である．これはもとのテンソルの独立成分の数と一致している．

つぎに完全反対称テンソル ϵ_{abcd} のスピノール表現を求めてみよう．これは (52.5), (52.5)′ という対称条件を満たすテンソル $\epsilon_{[ab][cd]}$ にさらに

$$\epsilon_{[ab][cd]} + \epsilon_{[ac][bd]} = 0 \tag{52.14}$$

という条件をつけたものと同等である．そこでこれのスピノール表現を

$$\epsilon_{[A\dot{U},B\dot{V}][C\dot{X},D\dot{Y}]}$$

とすれば，(52.14) はスピノールでかいた場合

$$\epsilon_{[A\dot{U},B\dot{V}][C\dot{X},D\dot{Y}]} + \epsilon_{[A\dot{U},C\dot{X}][B\dot{V},D\dot{Y}]} = 0 \tag{52.14$'$}$$

となる.

さて，テンソル $\epsilon_{[abcd]}$ はただ1個の独立成分をもつからこれのスピノール表現も同様であるはずである．したがって (52.13) の $\psi_{(ABCD)}$ や $\chi_{(\dot{U}\dot{V})(CD)}$ は0となる．また，スカラー S は実数か純虚数になるはずである．そこで，条件 (52.14)′ を用いて $S, \bar{S}$ の部分をかいてみる．その際つぎの便利な定理を使う必要がある.

定理 11.　任意の2成分量 f_A $(A=1, 2)$ に対して

$$f_A\epsilon_{BC} + f_B\epsilon_{CA} + f_C\epsilon_{AB} \equiv 0 \tag{52.15}$$

である.

[証　明]　(52.15) の左辺を F_{ABC} とおけば，これは A, B, C のすべての置換に対して完全反対称である．したがって A, B, C のどの2個が一致しても F は0となる．しかし，A, B, C はいずれも1, 2の値しかとりえないから，これら3個の添字の中には同一のものが必ずある．ゆえに $F\equiv 0$.

この応用として

$$\epsilon_{AB}\epsilon_{CD} + \epsilon_{AC}\epsilon_{DB} + \epsilon_{AD}\epsilon_{BC} \equiv 0 \tag{52.15$'$}$$

が成立する.

さて，上に述べたように ψ, χ は0であるから，(52.13) から

$$\begin{aligned}\epsilon_{[A\dot{U},B\dot{V}][C\dot{X},D\dot{Y}]} = \epsilon_{\dot{U}\dot{V}}\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}}(\epsilon_{AC}\epsilon_{BD} + \epsilon_{AD}\epsilon_{BC})S \\ + \epsilon_{AB}\epsilon_{CD}(\epsilon_{\dot{U}\dot{X}}\epsilon_{\dot{V}\dot{Y}} + \epsilon_{\dot{U}\dot{Y}}\epsilon_{\dot{V}\dot{X}})\bar{S}\end{aligned} \tag{52.16}$$

とおくことができる．これがさらに (52.14)′ を満たすためには $S+\bar{S}=0$, つまり S が純虚数である必要がある．この結果を導くには (52.16) を (52.14)′ に代入し，公式 (52.15)′ を使って整理すると，(52.14)′ は

$$(S+\bar{S})\{\epsilon_{AB}\epsilon_{CD}\epsilon_{\dot{U}\dot{X}}\epsilon_{\dot{V}\dot{Y}} + \epsilon_{AC}\epsilon_{BD}\epsilon_{\dot{U}\dot{V}}\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}} + \epsilon_{AD}\epsilon_{BC}\epsilon_{\dot{U}\dot{Y}}\epsilon_{\dot{X}\dot{V}}\} = 0$$

となるからである.

そこで，$S=i\beta$ とおけば

$$\begin{aligned}\epsilon_{[A\dot{U},B\dot{V},C\dot{X},D\dot{Y}]} &\overset{d}{\equiv} \epsilon_{[A\dot{U},B\dot{V}][C\dot{X},D\dot{Y}]} \\ &= i\{\epsilon_{\dot{U}\dot{V}}\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}}(\epsilon_{AC}\epsilon_{BD} + \epsilon_{AD}\epsilon_{BC}) \\ &\quad - \epsilon_{AB}\epsilon_{CD}(\epsilon_{\dot{U}\dot{X}}\epsilon_{\dot{V}\dot{Y}} + \epsilon_{\dot{U}\dot{Y}}\epsilon_{\dot{V}\dot{X}})\}\beta\end{aligned} \tag{52.17}$$

となる．あるいは公式 (52.15)′ を使うと

$$= 2i\{\epsilon_{\dot{U}\dot{V}}\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}}\epsilon_{AC}\epsilon_{BD} - \epsilon_{AB}\epsilon_{CD}\epsilon_{\dot{U}\dot{X}}\epsilon_{\dot{V}\dot{Y}}\}\beta \tag{52.17$'$}$$

となる．

β をきめるには (10.16) に対応して

$$\epsilon^{abcd} = \begin{cases} 1: & (abcd)\to(0123) \text{ が偶置換のとき} \\ -1: & (abcd)\to(0123) \text{ が奇置換のとき} \\ 0: & \text{その他のとき} \end{cases} \tag{52.18}$$

と定義すれば，(51.8)′, (51.9) を使って

$$\epsilon^{0123} = (\sigma^0)^{A\dot{U}}(\sigma^1)^{B\dot{V}}(\sigma^2)^{C\dot{X}}(\sigma^3)^{D\dot{Y}}\epsilon_{[A\dot{U},B\dot{V},C\dot{X},D\dot{Y}]}$$

に (52.17)′ を代入すると

$$2\beta = \epsilon^{0123} = 1$$

となる．したがって

$$\epsilon_{[A\dot{U},B\dot{V},C\dot{X},D\dot{Y}]} = i\{\epsilon_{\dot{U}\dot{V}}\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}}\epsilon_{AC}\epsilon_{BD} - \epsilon_{AB}\epsilon_{CD}\epsilon_{\dot{U}\dot{X}}\epsilon_{\dot{V}\dot{Y}}\} \tag{52.19}$$

となる．

つぎに Riemann テンソル R_{abcd} のスピノール表現を求めてみよう．これは (52.5), (52.5)′ のほかに，さらに

$$R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adbc} \equiv 0, \tag{52.20}$$

あるいは

$$\epsilon^{ebcd}R_{abcd} \equiv 0 \tag{52.20$'$}$$

という対称性をもつ．このためにこのテンソルの独立成分の数は 20 個である．

R_{abcd} は (52.20) を除けば $B_{[ab][cd]}$ と全く同じ対称性をもつから，そのスピノール表現は (52.13) という形をしているはずである．しかし条件 (52.20) のためにさらに 1 個だけ独立量が減る．(52.20) をスピノールでかくと，それは $\psi_{(ABCD)}$ や $\chi_{(\dot{U}\dot{V})(CD)}$ には何の制限をもあたえないことがわかる．しかし S, $\bar{S}$ にはつぎのような制限をあたえる．いま (52.20)′ をスピノール表現でかき，特に S, $\bar{S}$ の部分だけをひろいだすと，(52.19) を用いて

$$\begin{aligned}\epsilon^{[E\dot{Z},B\dot{V},C\dot{X},D\dot{Y}]}\{&\epsilon_{\dot{U}\dot{V}}\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}}(\epsilon_{AC}\epsilon_{BD} + \epsilon_{AD}\epsilon_{BC})S \\ &+ \epsilon_{AB}\epsilon_{CD}(\epsilon_{\dot{U}\dot{X}}\epsilon_{\dot{V}\dot{Y}} + \epsilon_{\dot{U}\dot{Y}}\epsilon_{\dot{V}\dot{X}})\bar{S}\} = 6(S - \bar{S})\delta^E{}_A\delta^{\dot{Z}}{}_{\dot{U}} = 0.\end{aligned}$$

したがって S は実数となる．そこで Riemann テンソル R_{abcd} のスピノール表現は

$$R_{A\dot{U},B\dot{V},C\dot{X},D\dot{Y}} = \epsilon_{\dot{U}\dot{V}}\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}}\psi_{(ABCD)} + \epsilon_{AB}\epsilon_{CD}\bar{\psi}_{(\dot{U}\dot{V}\dot{X}\dot{Y})}$$
$$+ \epsilon_{AB}\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}}\chi_{(\dot{U}\dot{V})(CD)} + \epsilon_{\dot{U}\dot{V}}\epsilon_{CD}\chi_{(\dot{X}\dot{Y})(AB)}$$
$$+ \{\epsilon_{\dot{U}\dot{V}}\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}}(\epsilon_{AC}\epsilon_{BD} + \epsilon_{AD}\epsilon_{BC})$$
$$+ \epsilon_{AB}\epsilon_{CD}(\epsilon_{\dot{U}\dot{X}}\epsilon_{\dot{V}\dot{Y}} + \epsilon_{\dot{U}\dot{Y}}\epsilon_{\dot{V}\dot{X}})\}S \qquad (52.21)$$

となる．ここで S は実数である．右辺の実数の独立成分の数は，(52.13) の場合と異なり，S には虚数部がないから 20 個である．

つぎに，R_{abcd} が物質のない場合の Einstein の方程式

$$R_{bc} = \eta^{ad}R_{abcd} = 0 \qquad (52.22)$$

を満足している場合を調べてみよう．

(52.22) をスピノールでかくと，(52.21) の $S, \chi_{(\dot{U}\dot{V})(CD)}$ はともに 0 であるべしという条件をあたえる．その結果

$$R_{A\dot{U},B\dot{V},C\dot{X},D\dot{Y}} = \epsilon_{\dot{U}\dot{V}}\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}}\psi_{(ABCD)} + \epsilon_{AB}\epsilon_{CD}\bar{\psi}_{(\dot{U}\dot{V}\dot{X}\dot{Y})} \qquad (52.23)$$

となる．

(52.23) を導くのには，別に R_{abcd} が $g_{\mu\nu}$ や $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ の特別な関数であるという性質を利用したわけではない．重要なことは添字の対称性だけである．既に §15 (90 ページ)で述べたように Riemann テンソルと全く同じ対称性をもつ 4 階テンソル $W_{[ab][cd]}$ が，特に

$$\eta^{ad}W_{[ab][cd]} = 0$$

を満足するとき，この W を **Weyl テンソル**という．したがって，任意の Weyl テンソル $W_{[ab][cd]}$ のスピノール表現は

$$W_{A\dot{U},B\dot{V},C\dot{X},D\dot{Y}} = \epsilon_{\dot{U}\dot{V}}\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}}\psi_{(ABCD)} + \epsilon_{AB}\epsilon_{CD}\bar{\psi}_{(\dot{U}\dot{V}\dot{X}\dot{Y})} \qquad (52.24)$$

という形をしていることがわかる．

(52.22) を満足しない Riemann テンソルでも，それの適当な線形結合により Weyl テンソルを作ることができる．すなわち

$$C_{abcd} \overset{d}{\equiv} R_{abcd} + \frac{1}{2}(\eta_{ac}R_{bd} + \eta_{bd}R_{ac} - \eta_{bc}R_{ad} - \eta_{ad}R_{bc})$$

$$+\frac{1}{6}(\eta_{ad}\eta_{bc}-\eta_{ac}\eta_{bd})R \tag{52.25}$$

とおけば C_{abcd} は Weyl テンソルの満たすべき条件をすべて満足する．特に R_{abcd} が（52.22）を満足するときは

$$C_{abcd}=R_{abcd}$$

となる．

最後にデュアル・テンソルのスピノール表現について調べてみよう．まず，（10.19）を局所 Lorentz 系の成分を用いてかくと，任意の反対称テンソル $f_{ab}=-f_{ba}$ に対して

$$^*f^{ab}\overset{d}{\equiv}\frac{1}{2}\epsilon^{abcd}f_{cd} \tag{52.26}$$

となる．$^*f^{ab}$ を f_{ab} のデュアル・テンソルという．

$^*f^{ab}$ のスピノール表現は

$$^*F^{[A\dot{U},B\dot{V}]}=(\sigma_a)^{A\dot{U}}(\sigma_b)^{B\dot{V}}\cdot{}^*f^{ab} \tag{52.27}$$

である．この右辺に（52.4），（52.19）を使うと

$$^*F^{[A\dot{U},B\dot{V}]}=\frac{1}{2}\epsilon^{[A\dot{U},B\dot{V},C\dot{X},D\dot{Y}]}(\epsilon_{CD}\bar{\chi}_{(\dot{X}\dot{Y})}+\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}}\chi_{(CD)})$$

となる．これをかき直すと

$$^*F_{[A\dot{U},B\dot{V}]}=i(\epsilon_{\dot{U}\dot{V}}\chi_{(AB)}-\epsilon_{AB}\bar{\chi}_{(\dot{U}\dot{V})}) \tag{52.28}$$

となる．これと f_{ab} のスピノール表現

$$(\sigma^a)_{A\dot{U}}(\sigma^b)_{B\dot{V}}f_{ab}\overset{d}{\equiv}F_{[A\dot{U},B\dot{V}]}\overset{d}{\equiv}\epsilon_{\dot{U}\dot{V}}\chi_{(AB)}+\epsilon_{AB}\bar{\chi}_{(\dot{U}\dot{V})} \tag{52.4}$$

を比べると

$$(\sigma^a)_{A\dot{U}}(\sigma^b)_{B\dot{V}}(f_{ab}\mp i\cdot{}^*f_{ab})=\begin{cases}2\epsilon_{\dot{U}\dot{V}}\chi_{(AB)}\\ 2\epsilon_{AB}\bar{\chi}_{(\dot{U}\dot{V})}\end{cases} \tag{52.29}$$

となる．

上と全く同様に Weyl テンソル R_{abcd} にデュアルなテンソルを

$$^*R_{abcd}\overset{d}{\equiv}\frac{1}{2}\epsilon_{cd}{}^{ef}R_{abef} \tag{52.30}$$

とおけば，（52.19），（52.23）から，そのスピノール表現は

$$^*R_{A\dot{U},B\dot{V},C\dot{X},D\dot{Y}} = i\{\epsilon_{\dot{U}\dot{V}}\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}}\psi_{(ABCD)} - \epsilon_{AB}\epsilon_{CD}\bar{\psi}_{(\dot{U}\dot{V}\dot{X}\dot{Y})}\} \tag{52.31}$$

となる．そこで (52.23) と一緒にして

$$\frac{1}{2}(R_{abcd} \pm i\cdot{}^*R_{abcd}) \overset{d}{\equiv} {}^{\pm}R_{abcd} \tag{52.32}$$

とおくとき，これに対するスピノール表現は

$$^{\pm}R_{A\dot{U},B\dot{V},C\dot{X},D\dot{Y}} = \begin{cases} \epsilon_{AB}\epsilon_{CD}\bar{\psi}_{(\dot{U}\dot{V}\dot{X}\dot{Y})} & (+\text{の場合}) \\ \epsilon_{\dot{U}\dot{V}}\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}}\psi_{(ABCD)} & (-\text{の場合}) \end{cases} \tag{52.33}$$

となる．

§ 53. 対称スピノールの標準分解，時空の分類

対称スピノールは何個かの独立な1階スピノールの積の和に分解できるという特性がある．

いま，対称スピノール $\psi_{(ABCD)}$ に任意の反変スピノール ξ^A を4個掛けて，不変量

$$S \overset{d}{\equiv} \psi_{(ABCD)}\xi^A\xi^B\xi^C\xi^D \tag{53.1}$$

を作ろう．いま，$\xi^2 = \xi^1\zeta$ とかけば

$$S = (\xi^1)^4\{\psi_{(2222)}\zeta^4 + 4\psi_{(2221)}\zeta^3 + 6\psi_{(2211)}\zeta^2 + 4\psi_{(2111)}\zeta + \psi_{(1111)}\}$$

となる．そこで｛　｝を ζ の4次式とみたとき，その根を $\lambda_{(a)}(a = 1, 2, 3, 4)$ とすれば

$$S = (\xi^1)^4\psi_{(2222)}\prod_{a=1}^{4}(\zeta - \lambda_{(a)}) \tag{53.1$'$}$$

となる．あるいはスピノール α_A を

$$\alpha_A = \{\alpha_1 = -\lambda_{(1)},\ \alpha_2 = 1\}, \qquad \text{または} \qquad \alpha^A = \{1,\ \lambda_{(1)}\} \tag{53.2}$$

とおく．同様に

$$\beta^A = \{1,\ \lambda_{(2)}\}, \qquad \gamma^A = \{1,\ \lambda_{(3)}\}, \qquad \delta^A = \{1,\ \lambda_{(4)}\} \tag{53.2$'$}$$

と定義すれば，(53.1)′ は

$$S = \psi_{(2222)}(\alpha_A\xi^A)(\beta_B\xi^B)(\gamma_C\xi^C)(\delta_D\xi^D)$$

となる．これと (53.1) を比べると

$$n_{(ABCD)}\psi_{(ABCD)} = \sum_{\text{perm}} \psi_{(2222)}\alpha_A\beta_B\gamma_C\delta_D \tag{53.3}$$

となる．右辺の $\sum$ は添字 A, B, C, D のすべての独立な順列について和をとることを示す．左辺の $n_{(ABCD)}$ は与えられた $ABCD$ に対する独立な順列の総数を示す．たとえば(ABCD)が(1122)なら $n=6$ である．$\psi_{(ABCD)}$ を (53.3) のようにかくことを**標準分解**という．

(53.3) と同様に2階対称スピノール $\chi_{(AB)}$ についても

$$n_{(AB)}\chi_{(AB)} = \sum_{\text{perm}} \chi_{(22)}\alpha_A\beta_B \tag{53.4}$$

とかくことができる．ここで

$$S = \chi_{(AB)}\xi^A\xi^B = \chi_{(22)}(\alpha_A\xi^A)(\beta_B\xi^B)$$

とおけば $\xi^A = \alpha^A$，または $\xi^A = \beta^A$ に対して $S=0$ となる．

いま，ξ の2次式 S が等根をもつとき，すなわち $\alpha_A = \beta_A$ ならば

$$\chi_{(AB)}\alpha^B = \chi_{(22)}\alpha_A\alpha_B\alpha^B = 0.$$

もし根が異なるときは

$$\chi_{(AB)}\alpha^A\alpha^B = \chi_{(22)}(\alpha_A\alpha^A)(\beta_B\alpha^B) = 0$$

となる．

同様に $\psi_{(ABCD)}$ についても (53.1)′ が等根をもつか否かにより種々の場合に分類される．ここでは $\psi_{(ABCD)}$ が時空の曲率テンソル R_{abcd} から (52.32) により導かれたテンソル ^-R のスピノール表現とする [(52.33) をみよ]．したがってこれから述べる分類は点Pにおける時空の幾何学的性質の分類を行うことになる．しかも (53.1) で定義されたSは局所座標系のとりかたに無関係な量である．もちろん一般座標系のとり方にも無関係な不変量である．したがって，以下に述べる分類は座標系のとり方に無関係な不変的性質による時空のタイプの分類である．このような分類は本書に述べる方法* とは別のやり方で，Petrov により与えられたので，これを **Petrov の分類** という.**

Petrov の N 型

これは (53.1) の S の根がすべて等しい場合である．このときは $\psi_{(ABCD)}$ は

---

* これは Penrose の方法である．R. Penrose: Ann. Phys. Princeton **10** (1960) 171～201.

** A. Z. Petrov: "*Einstein Space*", Oxford (1969).

$$\psi_{(ABCD)} = A\alpha_A\alpha_B\alpha_C\alpha_D$$

となる．ここで $A \overset{d}{\equiv} \psi_{(2222)}$ とした．したがって

$$\psi_{(ABCD)}\alpha^D = 0$$

となる．あるいは，(52.33) から

$$^{-}R_{A\dot{U},B\dot{V},C\dot{X},D\dot{Y}}\alpha^D\bar{\alpha}^{\dot{Y}} = 0. \tag{53.5}$$

いま，ヌル・ベクトル k^a を (52.2) により

$$k^a \overset{d}{\equiv} (\sigma^a)_{D\dot{Y}}\alpha^D\bar{\alpha}^{\dot{Y}} \tag{53.6}$$

と定義すれば，(53.5) はテンソル式

$$^{-}R_{abcd}k^d = 0 \tag{53.7}$$

となる．同様に

$$^{+}R_{abcd}k^d = 0 \tag{53.7$'$}$$

も成立する．(53.7)，(53.7)′ は時空が N 型であることを示す関係式である．すなわち，N 型ならば (53.7) を満たすヌル・ベクトル k^a が必ず存在する．

Petrov の III 型

これは S が 3 重根 α_A をひとつ，および 1 重根 β_A をひとつもつ場合である．したがって

$$\psi_{(ABCD)} = \frac{A}{4}\{\alpha_A\alpha_B\alpha_C\beta_D + \alpha_A\alpha_B\beta_C\alpha_D + \alpha_A\beta_B\alpha_C\alpha_D + \beta_A\alpha_B\alpha_C\alpha_D\}$$

である．そこで

$$\alpha^C\psi_{(ABCD)} = \frac{A}{4}\,\alpha_A\alpha_B\alpha_D(\beta_C\alpha^C)$$

となる．したがって

$$\alpha^C\psi_{(ABCD)}\alpha^D = \alpha^C\psi_{(ABCD)}\alpha_E\epsilon^{DE} = 0,$$

あるいは

$$\alpha^C\psi_{(ABC[D)}\alpha_{E]} \overset{d}{\equiv} \frac{1}{2}\,\alpha^C\{\psi_{(ABCD)}\alpha_E - \psi_{(ABCE)}\alpha_D\} = 0 \tag{53.8}$$

となる．これが 3 重根の特徴を表わす関係式である．

そこで (52.33) を使うと

$$\alpha^C\bar{\alpha}^{\dot{X}}\frac{1}{2}({}^-R_{A\dot{U},B\dot{V},C\dot{X},D\dot{Y}}\alpha_E\bar{\alpha}_{\dot{Z}} - {}^-R_{A\dot{U},B\dot{V},C\dot{X},E\dot{Z}}\alpha_D\bar{\alpha}_{\dot{Y}})$$

$$= \frac{1}{2}\alpha^C\bar{\alpha}^{\dot{X}}\epsilon_{\dot{U}\dot{V}}\{\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}}(\psi_{(ABCD)}\alpha_E - \psi_{(ABCE)}\alpha_D)\bar{\alpha}_{\dot{Z}}$$

$$+ \psi_{(ABCE)}\alpha_D(\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}}\bar{\alpha}_{\dot{Z}} - \epsilon_{\dot{X}\dot{Z}}\bar{\alpha}_{\dot{Y}})\}. \qquad (53.9)$$

この｛　｝の中の第1項は（53.8）から0となる．第2項は定理10により

$$\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}}\bar{\alpha}_{\dot{Z}} + \epsilon_{\dot{Z}\dot{X}}\bar{\alpha}_{\dot{Y}} = -\epsilon_{\dot{Y}\dot{Z}}\bar{\alpha}_{\dot{X}}$$

となるから，（53.9）の右辺は

$$= -\frac{1}{2}\alpha^C\bar{\alpha}^{\dot{X}}\epsilon_{\dot{U}\dot{V}}\psi_{(ABCE)}\alpha_D\epsilon_{\dot{Y}\dot{Z}}\bar{\alpha}_{\dot{X}}.$$

これは $\bar{\alpha}^{\dot{X}}\bar{\alpha}_{\dot{X}} = 0$ のために0となる．

そこで，（53.6）のようなヌル・ベクトルを用いて（53.9）の左辺をテンソル形式でかくと

$${}^-R_{abc[d}k_{e]}k^c = 0 \qquad (53.10)$$

となる．同様の式は ${}^+R$ に対しても成立する．（53.10）が3重根 α_A から作られたヌル・ベクトル k_a と曲率テンソルの間の特徴的関係である．

なお，1重根 β_A から作られるヌル・ベクトルを

$$l^a \overset{d}{\equiv} (\sigma^a)_{A\dot{B}}\beta^A\bar{\beta}^{\dot{B}} \qquad (53.11)$$

とすれば，1重根に対しては R_{abcd} は

$$l_{[f}R_{a]bc[d}l_{e]}l^b l^c = 0 \qquad (53.12)$$

という条件を満たす．* すなわち2種のヌル・ベクトル k_a, l_a が存在し，それらがそれぞれ（53.10），（53.12）を満たすとき，時空は点Pにおいて III 型であるという．

Petrov の D 型

S が2種の2重根 α_A, β_A をもつとき，D型という．このときは

$$\psi_{(ABCD)}\alpha^B\alpha^C = \frac{A}{6}\alpha_A\alpha_D(\beta_B\alpha^B)^2 \qquad (53.13)$$

となる．したがってこれに α^D を掛ければ0となる．しかしそれをテンソル形

* この式は後にI型のところでその導き方を説明する．

式にかき直して単純に

$$R_{abcd}k^b k^c k^d = 0$$

としても無意味である．なぜならば曲率テンソルはD型であるなしにかかわらず，$[c, d]$ について反対称であるから，この等式は常に成立し，D 型の判定条件とはならないからである．

(53.13) から

$$\alpha^B \alpha^C \psi_{(ABC[D)}\alpha_{E]} = \frac{1}{2}\alpha^B \alpha^C \{\psi_{(ABCD)}\alpha_E - \psi_{(ABCE)}\alpha_D\} = 0. \quad (53.14)$$

そこで (53.10) を導いたと同様にして，

$$k^b k^c \cdot {}^{-}R_{abc[d}k_{e]} = 0 \quad (53.15)$$

となる．ここで k_a は (53.6) で定義されたものである．全く同様に (53.11) で定義されたヌル・ベクトル l_a についても

$$l^b l^c \cdot {}^{-}R_{abc[d}l_{e]} = 0 \quad (53.16)$$

が成立する．${}^{-}R$ の代りに R 自身についても (53.15), (53.16) が成立することは容易にわかるであろう．上の結果をまとめると，(53.15), (53.16) を満たす 2 種の異なるヌル・ベクトル k_a, l_a が存在するとき，時空は点 P において D 型であるという．

Petrov の II 型

S が 1 個の 2 重根と 2 個の異なる 1 重根をもつときがII型である．これらの根に対応するヌル・ベクトルをそれぞれ k_a, l_a, h_a とすれば，それらは

$$k^b k^c R_{abc[d}k_{e]} = 0, \quad (53.17)$$

$$\left.\begin{aligned} l^b l^c l_{[f}R_{a]bc[d}l_{e]} &= 0, \\ h^b h^c h_{[f}R_{a]bc[d}h_{e]} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (53.18)$$

を満足する．(53.17) は (53.15) と同様の考察により導かれる．一方，(53.18) の導きかたについてはつぎの I 型のところで述べる．

Petrov の I 型

S が 4 個の異なる 1 重根をもつ場合である．したがって

$$\psi_{(ABCD)}\alpha^A \alpha^C = A\{\alpha_A \chi_D + \alpha_D \chi_A\}$$

という形になる．したがって

$$\alpha_{[F}\psi_{(A]BC[D)}\alpha_{E]}\alpha^B\alpha^C = 0 \tag{53.19}$$

となる．そこでこれをテンソル形式にもどすと

$$k_{[f}R_{a]bc[d}k_{e]}k^b k^c = 0. \tag{53.20}$$

ヌル・ベクトル k_a は α_A から (53.6) により作られたものである．同様に β_A, γ_A, δ_A から作られたヌル・ベクトルをそれぞれ l_a, h_a, j_a とすれば，これらはいずれも (53.20) と同じ形の関係式を満足する．つまり (53.20) を満たす4個の異なるヌル・ベクトルが存在することがI型の特徴である．

以上に述べたことをまとめたものが下の表である．左の列は Petrov の型を

Petrov の分類表

N	[4]	$N_{\mu\nu\rho\sigma}k^\sigma = 0$	(53.7)*
Ⅲ	[3, 1]	$III_{\mu\nu\rho[\sigma}k_{\tau]}k^\rho = 0$	(53.10)*
D	[2, 2]	$\begin{cases} D_{\mu\nu\rho[\sigma}k_{\tau]}k^\nu k^\rho = 0 \\ D_{\mu\nu\rho[\sigma}l_{\tau]}l^\nu l^\rho = 0 \end{cases}$	(53.15)* (53.16)*
Ⅱ	[2, 1, 1]	$II_{\mu\nu\rho[\sigma}k_{\tau]}k^\nu k^\rho = 0$	(53.17)*
I	[1, 1, 1, 1]	$k_{[\lambda}I_{\mu]\nu\rho[\sigma}k_{\tau]}k^\nu k^\rho = 0$	(53.20)*

示す記号である．第2列目はヌル・ベクトルの各種類の数を示す．たとえば [1, 1, 1, 1] は4個の異なるヌル・ベクトルがそれぞれ1個ずつ存在することを示す．[2, 1, 1] はそのなかで2個が同一のもの，残りの2個と一緒にして合計3種類のヌル・ベクトルのあることを示す．[2, 2] は2個ずつが同一で，結局2種類の異なるタイプのベクトルがあることを示す．[4] ははじめにあげた4個がすべて同一で，ただ1種類のベクトルしかないことを示す．最後の縦の列にある式は重複しているヌル・ベクトルの満たすべき関係式であり，Petrov のタイプを規定する条件式である．

ところで，上に述べた関係式はすべて局所 Lorentz 系に関するテンソル成分でかかれているが，これを一般テンソルの形式にかきかえることは容易である．そのときも全く同一の関係式となる．また $^{\pm}R$ のいずれに対しても成立す

る関係式であるから，R およびそれにデュアルな $^*R$ についても成立する式である．表では R に対する関係式だけがあたえられている．ついでに一般テンソルの場合の $^*R$ の定義をかくと

$$^*R^{\mu\nu\rho\sigma} \overset{d}{\equiv} \frac{1}{2\sqrt{-g}} \boldsymbol{E}^{\rho\sigma\alpha\beta} R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}$$

である．なお表の中にでてくる $D_{\mu\nu\rho\sigma}$ とは D 型の時空の曲率テンソルを指す．他の記号についても同様の意味をもつ．最後に一言注意をかく．著者により Petrov のタイプを示す記号が異なることがある．たとえば，本書の II, D をそれぞれ ID, II と呼ぶことがある．

この表で，ある(横)行の関係式を満たすヌル・ベクトルはそれより下にかかれているすべての関係式も満足する．たとえば，(53.7)* を満たす k^σ は (53.10)*～(53.20)* までのどの式をも満たす．したがって，(53.20)* という式はいかなるタイプの時空でも成立する関係式である．III 型や II 型にでてきた重複していないヌル・ベクトルの満たすべき式は (53.20)* と同一のものであるが，上述の理由からそれは，III および II を特徴づける式ではない．したがってそれらの式は表からはぶいた．

さてここで§35 に述べたことを思い起こそう．まず，波動域で成り立つ (35.12) をみると (53.20)* が成り立つことは容易にわかる．また，波動域では (35.16) のために時空はN型である．さらに，(35.19) のために重力波の波面における曲率テンソルの値の不連続量もN型の振舞をすることがわかる．また (35.20) からわかるように，重力の源の近くでは時空は I 型であるが，遠ざかるにしたがい次第に II → III → N と移行することがわかる．なお，この分類によれば Schwarzschild の時空や Kerr の解は II 型である．なぜならば，計量

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + a l_\mu l_\nu , \tag{44.a.1}$$

$$\eta^{\mu\nu} l_\mu l_\nu = l^\mu l_\mu = 0 \tag{44.a.2}$$

について調べてみればわかる．この場合には曲率テンソルは

$$R^\lambda{}_{\rho\mu\nu} l^\rho l^\mu = \frac{a}{2} \{ 2 l_{\nu,\mu} l^\mu l^\lambda{}_{,\rho} l^\rho + l_\nu l^\lambda{}_{,\rho\mu} l^\rho l^\mu - l_\nu \eta^{\lambda\sigma} l_{\rho,\mu\sigma} l^\rho l^\mu + l^\lambda l_{\nu,\rho\mu} l^\rho l^\mu$$

$$- l^\lambda l_{\mu,\rho\nu} l^\mu l^\rho\} + \frac{a^2}{2} l^\lambda l_\nu l_{\sigma,\mu} l^\mu l^\sigma{}_{,\rho} l^\rho \tag{53.21}$$

を満足する．この結果を求めるには（44.a.2）および

$$l_\mu l^\mu{}_{,\nu} = l^\mu l_{\mu,\nu} = 0 \tag{44.a.6}$$

を利用すると比較的容易に求まる．さらに

$$l^\mu \partial_\mu l^\alpha \overset{d}{\equiv} v^\alpha \overset{d}{\equiv} - A l^\alpha \tag{44.a.18}$$

という関係を使うと，（53.21）の右辺の第3項，第5項は0となる．また最後の項も消える．第2, 4項は

$$第2項 = 第4項 = - l_\nu l^\lambda \cdot A_{,\mu} l^\mu$$

となる．そこで結局

$$l^\rho l^\mu R^\lambda{}_{\rho\mu\nu} = a(A^2 - A_{,\mu} l^\mu) l^\lambda l_\nu \tag{53.22}$$

となる．したがって

$$l^\rho l^\mu R^\lambda{}_{\rho\mu[\nu} l_{\tau]} = 0. \tag{53.23}$$

これは計量（44.a.1）をもつ時空がII型であることを示す．Schwarzschild の解や Kerr の解はいずれも（44.a.1）の形になるから，これらはII型である．

第9章　宇宙論への応用

§54.　宇宙論への応用

物理学に登場する種々の基本的相互作用はつぎの4種類に大別される．すなわち，強い相互作用，電磁的相互作用，弱い相互作用，最後に重力による相互作用である．強い相互作用や弱い相互作用は力の作用域がごく短い距離，つまり素粒子物理学的なミクロの領域内に限られる．電磁的相互作用はその到達距離には制限はないが，現実の物質はすべて電気的に中性なので，宇宙論的スケールの現象では無視してかまわない．重力による相互作用はそれ自体，非常に弱いものではあるが，宇宙論に登場する物体は，その質量が非常に大きいため，結局この力による相互作用が宇宙論的現象では最も重要な役目をする．このように考えると宇宙の大局的考察や記述にとって，一般相対論が重要な役割を果たすのはまことに当然といえよう．そこでこれから一般相対論的宇宙模型について考えてみよう．

一般相対論的宇宙模型とは，宇宙全体に関する大局的性質を再現できるような Einstein 方程式の特別な解のことである．太陽の中心でエネルギーがどのように生みだされているかといった問題は原子核物理学の問題で，これは宇宙模型の考察の対象とはならない．星雲の誕生や発展の機構には重力が重要な役目をすることは確かではあるが，これも宇宙模型の観点からみれば小さな問題である．これから問題にすることは，さきにも述べたように宇宙の大局的性質に関する観測結果を再現することにある．そのようなもののひとつにたとえば宇宙の平均密度がある．

宇宙が時間とともに成長するということを相対論から導くことができることは，Einstein 自身も認めていた．しかし彼はこれを，物理学的にみて不合理として，受けいれようとはしなかった．そこで彼の方程式から静的宇宙を導くことができるように，彼はいわゆる宇宙項をつけ加えた．しかし後に，宇宙は現

実に膨張しつつあると考えるべきであるということが実証された．このような証拠のひとつは **Hubble の法則** として知られる現象である．

これはつぎのようなことである．すなわち，遠方の星雲からの光はすべて赤方偏移をしている．しかも偏移の大きさは，遠方の星雲ほど大きい．これはすべての星雲が，地球からの距離に比例した速度で，地球を中心として，それから遠ざかりつつあるとすれば，それに基づく Doppler 効果として理解できる．このような現象は何も地球からみた場合だけに限ったことではなく，多分他のどの星からみても同じ現象が観測されると考えるべきであろう．このような解釈が正しいとすれば，宇宙は現在膨張しつつあることになる．

さらに 1965 年には別の証拠もみつかった．すなわち，この宇宙は黒体輻射のスペクトル分布をもった電磁波により満たされているということが発見された．この電磁波は熱的平衡状態にあり，スペクトルの形から推測される宇宙の現在の温度は 3°K である．これは今からおよそ 2×10^{10} 年の昔，宇宙が大爆発とともに誕生し，そのとき火の玉状の電磁波の塊であった宇宙が，瞬時に膨張しつつ冷却し，物質の創生後もあとに残った電磁波が上述のそれであると考えられる．この電磁波の存在こそ宇宙の発展成長の証拠であろう．このような証拠がみつかった以上，Einstein がいやいや導入した宇宙項はなくてもよいことになる．この宇宙項の存否も宇宙模型のとりあげるべき問題である．

上述のように宇宙が発展するとすれば，それの年齢も宇宙模型が説明すべき対象のひとつである．あるいは膨張収縮を周期的にくり返すとすればその周期も対象となる．寿命は少くとも地球や太陽の寿命よりも永くなければならない．膨張説のきっかけとなった Hubble の法則も宇宙模型のとりあげるべき重要な課題である．

一般相対論の天体現象への応用については既に述べた．しかしこれから述べる宇宙模型の問題といままでのそれとでは，考え方の上でひとつの大きな違いがある．たとえば，惑星運動を論じた場合には重力場の源である太陽のエネルギー・テンソル $T_{\mu\nu}$ はあらかじめ与えられていた．つまり，与えられた $T_{\mu\nu}$ の作る重力場，およびその中を運動する質点の振舞が考察の対象であった．ま

た，Einstein の方程式の解を求めるのに必要な境界条件も，われわれが勝手に与えた．

これに反して宇宙模型を論ずる際には重力場 $g_{\mu\nu}$ ばかりでなく，$T_{\mu\nu}$ も未知量である．さらに境界条件も勝手に与えるわけにはいかない．むしろこれらはいずれも Einstein の方程式を用いて導きだすべきものである．実際 Einstein の理論によれば物質の $T_{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ を規定する．逆にその中を運動する物質の世界線は時空の幾何学により運命づけられる．したがって物質とその容器である時空とは互いに相手に制約を加えることになるから，これらを同時に求めることが宇宙論の特徴であるのは当然といえよう．ただここで境界条件だけが問題である．これさえも $T_{\mu\nu}$ から規定されるか，それともわれわれが別途に与えるかは，議論の分かれるところである．モデルによっては境界条件を別に賦与する必要のない場合がある．もしそのような場合ならば，物質が時空のありかたを完全に決定することになり，Mach の原理は Einstein の方程式により厳密に表現されたことになる．これに反して境界条件だけは，われわれが別途に他の経験事実をもとに適宜与える必要があるとするならば，Einstein の方程式は Mach の原理を完全には表現していないことになる．実際には同じ $T_{\mu\nu}$ のもとに，異なる境界条件を用いたために，異なる宇宙模型が作られている．このことは（Mach の原理）＝（Einstein 方程式）＋（境界条件）ということを表わしている．

注　Mach の原理について説明しよう．Mach のもともとの考えは“物体のもつ慣性は宇宙内にあるすべての物質の存在に由来する”というものである．それゆえ，もし宇宙内に，ただ1個だけ物体が存在したとすれば，その物体の慣性は0であり，それについて語ることは無意味である．この主張を Einstein は **Mach の原理** と名づけた．この内容を少し修正して，“物質のエネルギー・テンソルが時空の幾何学を規定する”という考えを Einstein は原理としてとりあげた．これを数式にかいたものが Einstein の方程式である．

さてこれから宇宙模型の主なものの二，三について紹介する．その際，基礎にとる Einstein の方程式としては宇宙項をもつ式を採用する．宇宙定数 λ を 0 とおくべきか否かは模型によることであり，それこそ宇宙論の主要課題のひとつである．

§55. Robertson-Walker 型計量

われわれの住むこの大宇宙は多数の星雲（われわれの住む銀河系もこのひとつ）からできている．各星雲は10億から1兆個ぐらいの恒星の集団である．星雲は必ずしも一様に分布せず，それらは多数集まって星雲団を作る．この星雲団に着目するとき，大宇宙は，大体において均一に分布した星雲団で満たされているといえる．そこでこれからは各星雲団をそれぞれ1個の分子と考え，このような分子からできているガスがこの宇宙に充満していると考えよう．このガスの質量密度は経験に基づいて空間的に一様とする．しかし時間的には変化してもかまわないと考える．また Mach の原理に従って時空の幾何学はそこに散在する物質により決定されると考える．それゆえ，空間は幾何学的にも“一様”とする．この“一様”という言葉を後で数学的に明確に定義する．これからつぎの仮定のもとに，どのような計量 $g_{\mu\nu}$ が許されるかを考えてみよう．

（a） 時空内には適当な時間座標 x^0 が存在し，$x^0=$ 一定 という超曲面に対して x^0 軸はいたる所で直交する．この時間を用いるとき，物質は静止しているとする．

（b） 任意の時刻 x^0 において，空間は局所的に等方的とする．

（c） 任意の時刻 x^0 において，空間内のすべての点は互いに“同等”である．

仮定（a）によりこの特別な時間座標 x^0 を採用すると，空間座標 $x^k=$ 一定 $(k=1, 2, 3)$ という式は物質粒子の測地線を表わすことになる．つまり，空間内の各点を通る x^0 軸は物質粒子の世界線を表わし，それは $x^0=$ 一定 というすべての面を垂直につらぬく．このような座標系が存在するということが仮定（a）である．この系を採用することは以後の議論を非常に扱いやすいものにしてくれるが，反面，一般変換に対する共変性を破ることになる．

いま，空間座標 x^1, x^2, x^3 を直交座標とし，

$$(d\vec{x})^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2,$$

$$r=\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}$$

とするとき，仮定（a），（b）によれば

$$ds^2=-(dx^0)^2+A(x^0, r)(d\vec{x})^2$$

となる．この空間部分

$$d\sigma^2 \overset{d}{\equiv} A(x^0, r)(d\vec{x})^2 \qquad A>0 \tag{55.1}$$

が点 $\vec{x}$ の方向，ならびに $d\vec{x}$ の方向に依存しないということが仮定（b）の主張である．したがって $(\vec{x}\cdot d\vec{x})^2$ に比例するような項はあってはこまる．ds^2 の第1項は，仮定（a）を満たすものとしては $-B^2(dx^0)^2$ としてもよい．しかし（a）のために B は r に依存するわけにはいかない．つまり B は x^0 だけの関数である．したがって

$$x^{0\prime} \overset{d}{\equiv} \int B(x^0)dx^0$$

とおけば

$$-(B\,dx^0)^2 = -(dx^{0\prime})^2$$

となる．それゆえ，上に与えた ds^2 は（a),（b）を満たす最も一般的な形式といえる．

最後に（c）について説明する．$x^0=$ 一定 としたとき，任意の2点 P, Q が“同等”とは，両点における $d\sigma^2$ の比が x^0 に関係なく常に一定の値をもつということである．この比の値はもちろん，P, Q の位置に依存してもかまわない．しかしそれは x^0 には無関係である．したがって P 点における物理現象の経過は，（P における）長さのディメンションをもつ量だけについて，P, Q の位置だけできまるスケールの変更をすれば，Q 点における現象の経過と全く同じものになる．空間内のすべての点に対して以上のことが成立すべきであるという要請が仮定（c）である．

この要請を式でかくと

$$\frac{A(x^0, r_Q)}{A(x^0, r_P)} = \phi(r_Q, r_P) \tag{55.2}$$

となる．ここで r_P を特別な点とみなし，r_P には目をつぶり

$$A(x^0, r_P) \overset{d}{\equiv} e^{h(x^0)}$$

とおく．同様に ϕ についても，これを r_Q の関数と考えて

$$\phi(r_Q, r_P) \overset{d}{\equiv} e^{f(r_Q)}$$

とおけば，(55.2) で r_Q の代りに単に r とかくとき

$$A(x^0, r) = e^{f(r)+h(x^0)} \tag{55.3}$$

となる．つまり，仮定 (c) は (55.1)$'$ の A が x^0 および r の関数に因数分解されることを意味する．

結局，仮定 (a), (b), (c) から

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + e^{f(r)}e^{h(x^0)}\{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\} \tag{55.4}$$

となる．前に述べた "空間が一様" とは仮定 (b), (c) のことである．

(55.4) から $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ を計算しよう．

$$f' \overset{d}{\equiv} \frac{df}{dr}, \qquad h' \overset{d}{\equiv} \frac{dh}{dx^0}$$

とおけば，0 でない $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ は（ラテン字は 1, 2, 3 を示す）

$$\Gamma^0{}_{mn} = \frac{1}{2}h'e^{f+h}\delta_{mn},$$

$$\Gamma^l{}_{0m} = \frac{1}{2}h'\delta^l{}_m,$$

$$\Gamma^l{}_{mn} = \frac{1}{2r}f'(x^m\delta^l{}_n + x^n\delta^l{}_m - x^l\delta_{mn}).$$

これらを用いて $G^\mu{}_\nu$ を求めると

$$G^0{}_0 = \frac{3}{4}(h')^2 - e^{-(f+h)}\left\{f'' + \frac{1}{4}(f')^2 + 2\frac{f'}{r}\right\},$$

$$G^k{}_0 = G^0{}_k = 0,$$

$$G^k{}_l = \delta_{kl}\left[h'' + \frac{3}{4}(h')^2 - \frac{1}{2}e^{-(f+h)}\left(f'' + \frac{1}{r}f'\right)\right] + \frac{x^kx^l}{2r^2}e^{-(f+h)}\left\{f'' - \frac{1}{2}(f')^2 - \frac{f'}{r}\right\}.$$

そこで Einstein の方程式（これからは宇宙項も考慮する）

$$G^\mu{}_\nu - \lambda\delta^\mu{}_\nu = \kappa T^\mu{}_\nu \tag{21.6}$$

から

$$\left.\begin{aligned} \kappa T^0{}_0 &= \frac{3}{4}(h')^2 - e^{-(f+h)}\left\{f'' + \frac{1}{4}(f')^2 + 2\frac{f'}{r}\right\} - \lambda, \\ T^k{}_0 &= T^0{}_k = 0, \end{aligned}\right\} \tag{55.5}$$

$$\kappa T^k{}_l = \delta_{kl}\left[h'' + \frac{3}{4}(h')^2 - \frac{1}{2}e^{-(f+h)}\left(f'' + \frac{1}{r}f'\right) - \lambda\right] + \frac{x^k x^l}{2r^2}e^{-(f+h)}\left\{f'' - \frac{1}{2}(f')^2 - \frac{f'}{r}\right\}.$$

さて，点Pを中心とした座標軸の回転

$$x^k \to x^{k\prime} = O^k{}_l x^l$$

を考えてみよう．$\boldsymbol{O}$ は直交行列であるから

$$\sum_{k=1}^{3} O^k{}_l O^k{}_m = \delta_{lm}, \quad \text{または} \quad (O^{-1})^l{}_k = O^k{}_l .$$

したがって

$$x^m = O^k{}_m x^{k\prime} = (O^{-1})^m{}_k x^{k\prime}.$$

この変換により $T^k{}_l$ は

$$T^k{}_l \to T^k{}_l{}' = \frac{\partial x^{k\prime}}{\partial x^a} T^a{}_b \frac{\partial x^b}{\partial x^{l\prime}} = O^k{}_a T^a{}_b (O^{-1})^b{}_l \cdot$$

ところで物質の分布はすべての点で等方的であるから，回転に対して $T^k{}_l$ の成分の値は不変でなければならない．つまり

$$O^k{}_a T^a{}_b (O^{-1})^b{}_l = T^k{}_l .$$

これを行列を用いてかくと，すべての3次元直交行列 $\boldsymbol{O}$ に対して

$$\boldsymbol{OT} = \boldsymbol{TO}$$

となる．すべての $\boldsymbol{O}$ の集合は3次元回転群の既約表現である．$\boldsymbol{T}$ がそのいずれとも可換となるためには $\boldsymbol{T}$ は3次元単位行列にある数を掛けたものでなければならない．したがって

$$T^k{}_l = S\delta^k{}_l \qquad (55.6)$$

となる．ここでSは3次元回転に対して不変な，しかし点Pに依存するある数である．この式は3次元直交系を用いて導いた等式である．しかし左辺は3次元一般変換に対してもテンソルである．また $\delta^k{}_l$ も同様に一般変換に対しても混合テンソルである．したがって同じ数Sを用いるならば，上の関数は一般の座標系でも成り立つ等式である．

(55.5) と (55.6) を比べると，(55.5) の $T^k{}_l$ の $x^k x^l$ に比例する項は0とならねばならない．したがって

$$f'' - \frac{1}{2}(f')^2 - \frac{f'}{r} = 0 \tag{55.7}$$

となる．これを r で割ると

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}f'\right) - \frac{r}{2}\left(\frac{f'}{r}\right)^2 = 0.$$

これはすぐに積分ができて，結局

$$e^{f(r)} = b^2\left(1 + \frac{r^2}{4a}\right)^{-2} \tag{55.8}$$

となる．a, b は実数の積分定数である．そこで

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + e^{h(x^0)}\left(1 + k\frac{r^2}{4r_0{}^2}\right)^{-2}(d\vec{x})^2 \tag{55.9}$$

となる．ここで b^2e^h をあらためて $e^{h(x^0)}$ とおいた．また (55.8) の $a = r_0{}^2/k$ とした．k は ± 1 または 0 とする．

なお，(55.8) であたえられる f を使うと

$$\kappa T^0{}_0 = -\lambda + \frac{3}{4}(h')^2 + 3k\frac{1}{r_0{}^2}e^{-h},$$

$$\kappa T^k{}_l = \delta^k{}_l\left\{-\lambda + h'' + \frac{3}{4}(h')^2 + k\frac{1}{r_0{}^2}e^{-h}\right\}.$$

これらはいずれも x^0 の関数ではあるが，r には無関係である．したがって物質の分布は空間的に全く一様である．Einstein の方程式を使えば，上の式から逆に $G^\mu{}_\nu$ もまた x^0 だけの関数となる．したがって空間も一様である．

(55.9) を **Robertson-Walker**（略して R-W）**型計量**という．このタイプの計量で表わされる宇宙の性格は，最終的には宇宙定数 λ が 0 か否か，$k = \pm 1, 0$ のいずれであるか，および $h(x^0)$ の形により決定される．

§56. Robertson-Walker 型計量の性質

これから R-W 型計量をもつ宇宙の性質を調べるために，まずその中における質点の運動を調べてみよう．

まず質点が静止していることが可能か否かを考えよう．もし静止が可能ならば，x^0 の如何にかかわらず，$x^k =$ 一定 は測地線の方程式を満たさねばならな

い．いま

$$\ddot{x}^0 + \Gamma^0{}_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0$$

に $x^k = \text{const}$ を代入すると，$\Gamma^0{}_{00} = 0$ のためにこの式は

$$\ddot{x}^0 = 0$$

となる．したがって $\dot{x}^0 = \text{const} = c$ である．つぎに

$$\ddot{x}^k + \Gamma^k{}_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0$$

は $\Gamma^k{}_{00} = 0$ のために $\ddot{x}^k = 0$ となる． したがって $\dot{x}^0 = c$，$x^k = \text{const}$ は確かに測地線を表わしている．つまりこの時空では空間座標軸に固定された点は，すべて運動方程式にしたがって“静止”という運動状態にある．あるいはこの座標系は多数の物質（つまり，星雲団の全体）と一緒に動いている系であるといってもよい．つまり星雲団の全体に対する静止系がここに採用している座標系である．この結果は仮定（a）を確かに満たしている．

ところで，ある瞬間に質点の4元速度が $\dot{x}^0 = c$，$\dot{x}^k = 0$ ならば，上に述べたように $\ddot{x}^\mu = 0$ が成立する．したがってこの質点の4元速度は常に $\dot{x}^0 = c$，$\dot{x}^k = 0$，つまり静止している．逆にある瞬間に $\dot{x}^k \neq 0$ ならば，それ以後，いかなるときも，決して $\dot{x}^k = 0$ とはならない． もしなったとすれば，逆に常に $\dot{x}^0 \equiv c$，$\dot{x}^k \equiv 0$ となるから矛盾する．

このように考えると，ここに用いている“静止系”は慣性系とよんで差しつかえない．この座標系からみれば上述のようにすべての星雲団は静止してみえる．したがってこれこそいわゆる恒星系である．われわれが遠心力とか慣性力という言葉を口にするときは，まさにこのような座標系に対する加速度運動がその原因であると理解すべきである．

さて，(55.9) は，極座標を用い，さらに

$$\frac{r}{r_0} = u, \qquad R(t) = r_0 e^{h(x^0)/2} \tag{56.1}$$

とおくと，（注：u はディメンションのない数である）

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + R(t)^2\left(1 + \frac{k}{4}u^2\right)^{-2}[du^2 + u^2\{(d\theta)^2 + (\sin\theta\, d\varphi)^2\}] \tag{56.2}$$

となる．この空間部分 $d\sigma^2$ はつぎのように考え直すことができる．ここでは $k=+1$ の場合だけを考えよう．

いま仮に 4 次元 Euclid 空間を考える．その中の点の位置を直交座標 (y^1, y^2, y^3, y^4) で表わす．いま，半径が A の球面

$$A^2=(y^4)^2+\sum_{k=1}^{3}(y^k)^2 \tag{56.3}$$

を考える．この面上の 2 点間の距離は

$$d\sigma^2=\sum_{k=1}^{3}(dy^k)^2+(dy^4)^2$$

であたえられる．しかし，(56.3) のために dy^4 はかきかえられて

$$d\sigma^2=\sum_{k=1}^{3}(dy^k)^2+\{A^2-\sum_{k=1}^{3}(y^k)^2\}^{-1}(\sum_{l=1}^{3}y^l dy^l)^2.$$

ここで $\rho^2=\sum_{k=1}^{3}(y^k)^2$ とおき，さらに

$$\rho\overset{d}{\equiv}A\left(1+\frac{v^2}{4}\right)^{-1}v$$

により v を定義する．(y^1, y^2, y^3) の代りに極座標 (ρ, θ, φ) を使い，さらに ρ の代りに v を使えば

$$d\sigma^2=A^2\left(1+\frac{v^2}{4}\right)^{-2}[(dv)^2+v^2\{(d\theta)^2+(\sin\theta\, d\varphi)^2\}] \tag{56.4}$$

となる．ここで球面 (56.3) の半径 A を $R(t)$ とおき，v を u と同一視すれば，(56.4) は (56.2) の空間部分と完全に一致する．

そこで，(56.2) の空間部分で表わされた宇宙（つまり $x^0=$ 一定 という瞬間における時空の切口）は，仮想的な 4 次元 Euclid 空間の中にある半径 $R(t)$ の球面にほかならないと考えてよかろう．つまりわれわれはこの球面の上に住んでいると思えばよい．このような考えにしたがえば，$R(t)$ を**宇宙の半径**と考えてよかろう．この仮想的 4 次元 Euclid 空間は，ただ (56.2) の空間部分の性質を理解しやすいように補助的に考えたもので，これともとの 4 次元 Riemann 空間である時空とは直接には関係はない．

このような補助的手段を用いると以下に述べることは大いに理解しやすくなると思う．まず，空間内の 1 点（これを座標原点としよう）から最も遠い点ま

での“直線”距離を求めてみよう．ここでは $k=1$ の場合にかぎる．$\theta=$ 一定，$\varphi=$ 一定 とおくとき，求める距離は

$$\int d\sigma=\int_0^\infty R(t)\left(1+\frac{u^2}{4}\right)^{-1}du=\pi R(t) \qquad (56.5)$$

となる．これは，前述の仮想的球面の立場からみると，球面上の1点から，それを通る直径の反対側の端点までの大円にそった道のり，つまり大円の円周の半分にほかならない．

ついでに全空間の体積 V も求めてみよう：

$$\begin{aligned}V&=\int\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}\,dud\theta d\varphi\\&=R^3\int_0^\infty du\left(1+\frac{u^2}{4}\right)^{-3}u^2\int_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_{\varphi=0}^{2\pi}d\varphi=2\pi^2R^3.\end{aligned} \qquad (56.6)$$

これは仮想的球面の全表面積にほかならない．

もし $k=-1,0$ とすると $\int d\sigma$ も V も有限とはならない．$k=1$ の場合には宇宙の大きさは有限となる．しかし補助的球面という描像が示すようにこの宇宙には境界(はて)がない．

§57. Robertson-Walker 型計量と Hubble の法則

R-W 型計量を使うと容易に Hubble の法則を導くことができる．いま，遠方の星雲（これはここでは点とみなしてよい）G から放射された光を座標原点にいる観測者 O が観測するとしよう．いま，G の空間的位置を x^1, x^2, x^3 の代りに（u_G, θ, φ）で表わす．光線の進路を示すのに使うパラメーターを λ として，t に無関係な量 l を

$$dl\overset{d}{\equiv}\left(1+k\frac{u^2}{4}\right)^{-1}d\chi \qquad (57.1)$$

で定義する．ここで χ は

$$d\chi\overset{d}{\equiv}\left[\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2+u^2\left\{\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2+\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2\right\}\right]^{1/2}d\lambda \qquad (57.2)$$

である．u, θ, φ はいずれも λ の既知関数で，ヌル測地線を表わすものとする．

光の進路はヌル測地線であるから，上の l を使うと

$$\left(\frac{dx^0}{d\lambda}\right)^2 - \{R(t)\}^2\left(\frac{dl}{d\lambda}\right)^2 = 0. \tag{57.3}$$

いま，時刻 t_G に星雲 G から放出された光が O に到達した時刻を t_0 とすれば，(57.3) から

$$c\int_{t_G}^{t_0}\frac{dt}{R(t)} = -\int_{u_G}^{0}\frac{d\chi}{1+k\dfrac{u^2}{4}} = \int_0^l dl = l. \tag{57.4}$$

G が時刻 t_G から $t_G+\Delta t_G$ までの間，光を放射したとし，これが O に到達した時刻をそれぞれ，$t_0 \sim t_0+\Delta t_0$ とする．明らかに

$$c\int_{t_G+\Delta t_G}^{t_0+\Delta t_0}\frac{dt}{R(t)} = l = c\int_{t_G}^{t_0}\frac{dt}{R(t)}. \tag{57.4$'$}$$

いま，Δt_G の間に n 個の光の波が G から放射されたとすれば，光源 G の固有時間 $\Delta\tau_G(=\Delta t_G)$ で測ったこの光の振動数 ν_G は

$$\nu_G = \frac{n}{\Delta\tau_G} = \frac{n}{\Delta t_G}$$

である．これを原点 O で受けて，O に静止している時計を用いて振動数を測ると，O における振動数 ν_0 は

$$\nu_0 = \frac{n}{\Delta\tau_0} = \frac{n}{\Delta t_0}$$

となる．$\Delta\tau_0(=\Delta t_0)$ は O の固有時間である．

さて，Δt_0, Δt_G は十分に短く，この間に起こる $R(t)$ の変化は無視できるものとすれば，(57.4)′ から

$$O = \int_{t_G+\Delta t_G}^{t_0+\Delta t_0}\frac{dt}{R} - \int_{t_G}^{t_0}\frac{dt}{R} = \frac{\Delta t_0}{R(t_0)} - \frac{\Delta t_G}{R(t_G)}$$

となる．したがって，$R_0 \overset{d}{\equiv} R(t_0)$, $R_G \overset{d}{\equiv} R(t_G)$ とかけば

$$\frac{\nu_G}{\nu_0} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t_G} = \frac{R_0}{R_G}. \tag{57.5}$$

光速は，(55.1)，あるいは (56.2) から

$$\frac{d\sigma}{dt} = R(t)\frac{dl}{dt} = c$$

であるから，G，および O における光の波長をそれぞれ λ_G, λ_0 とすれば

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_G}=\frac{c/\nu_0}{c/\nu_G}=\frac{R_0}{R_G},$$

あるいは

$$z\stackrel{d}{\equiv}\frac{\lambda_0-\lambda_G}{\lambda_G}=\frac{R_0-R_G}{R_G} \tag{57.6}$$

となる．z は波長の相対的偏移を示す．

以上の議論は観測者が原点に静止している場合に限らない．一般に座標系に静止している任意の星雲 G から放射された光を，任意の点 P において，座標系に対して静止している観測者が観測した場合にも上と全く同じ結果が導かれることは容易に理解できよう．

さて，観測結果によると $z>0$ である．したがって

$$R_0-R_G>0 \qquad (t_0>t_G).$$

つまり，少くとも現在は t とともに R は増加しつつある．したがって R-W 型計量をもつ宇宙は，現在膨張しつつある．

さて，Hubble の法則とは z が星雲 G と観測者の間の距離に比例するという主張である．つまり (57.4) で与えられた l と z が比例するということである．これをこれから第1近似で証明しよう．まず $R(t)/c$ は光が宇宙半径にあたる距離を進むに要する時間を示す．これから扱う時間はすべて $R(t)/c$ に比べればはるかに小さいと仮定しよう．したがって

$$t_0-t_G\ll\frac{R_0}{c}$$

と仮定する．これを使うと

$$\frac{c(t_0-t_G)}{R_0}<\int_{t_G}^{t_0}\frac{cdt}{R(t)}<\frac{c(t_0-t_G)}{R_G}\ll 1.$$

つまり (57.4) から $l\ll 1$ である．

つぎに $1/R(t)$ を $(t-t_0)$ のべき級数に展開する：

$$\frac{1}{R(t)}=\frac{1}{R_0}-\frac{c(t-t_0)}{R_0}\frac{R_0'}{cR_0}+\left\{\frac{c(t-t_0)}{R_0}\right\}^2\left\{\frac{(R_0')^2}{R_0}-\frac{R_0''}{2}\right\}\Big/c^2$$
$$+O\left[\left\{\frac{c(t-t_0)}{R_0}\right\}^3\right]. \tag{57.7}$$

ここで $R_0' = (dR/dt)_0$, $R_0'' = (d^2R/dt^2)_0$ を示す. (57.7) を (57.4) に代入すると

$$l = h + \frac{R_0'}{2c}h^2 + \frac{h^3}{3c^2}\left\{(R_0')^2 - \frac{R_0R_0''}{2}\right\} + \cdots. \qquad (57.8)$$

ここで

$$h \overset{d}{\equiv} \frac{c(t_0 - t_G)}{R_0} \qquad (57.9)$$

である.

一方, (57.7) の t を t_G とおけば

$$cz = c\frac{R_0 - R_G}{R_G} = R_0'h + \frac{h^2}{c}\left\{(R_0')^2 - \frac{R_0R_0''}{2}\right\} + \cdots. \qquad (57.10)$$

そこで, l と cz の関係を求めるために (57.8) を近似的に

$$l = h + \frac{R_0'}{2c}h^2 \qquad \text{または} \qquad h = l - \frac{R_0'}{2c}l^2$$

でおきかえる. これを (57.10) に代入すると

$$cz = R_0'l + \frac{1}{2c}(1 + q_0)(R_0')^2l^2 \qquad (57.11)$$

となる. ここで

$$q_0 = -\frac{R_0R_0''}{(R_0')^2} \qquad (57.12)$$

を**減速パラメーター** (deceleration parameter) という.

さて, 時刻 t_0 に観測者 O と星雲 G の間の距離 (天文学者が測る距離) L は

$$L = R_0\int\frac{d\chi/d\lambda}{1 + k\frac{u^2}{4}}d\lambda = R_0l \qquad (57.13)$$

としてよい. そこで (57.11) を l の 1 次までにとどめると

$$cz = \frac{R_0'}{R_0}L = HL, \qquad (57.14)$$

$$\left(H \overset{d}{\equiv} \frac{R_0'}{R_0}\right) \qquad (57.15)$$

となる. (57.14) はまさに Hubble の法則にほかならない. H を **Hubble の定数**という.

(57.14) は，観測者 O に対して星雲 G が後退するために起こる Doppler 効果に基づくものと解釈することもできる．

星の後退速度 v は，(57.13) から

$$v=\left(\frac{dL(t)}{dt}\right)_0=R_0'l.$$

したがって (57.14) は

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\overset{d}{\equiv}z=\frac{R_0'L}{cR_0}=\frac{v}{c}.$$

これは Doppler 効果を v/c の1次の近似で表わした公式である．

§ 58. Robertson-Walker 型計量と Einstein の方程式

いままでは仮定 (a), (b), (c) のもとに全く一般的な考察に終始した．宇宙定数 λ や，k の値の選択，さらに $R(t)$ が t のどのような関数であるべきかについては，全く未定のままであった．そこでこれから物理学的考察を加えることにより，これら未定の量を決定しよう．

まず，R-W 型計量は (55.9) から

$$ds^2=-(dx^0)^2+\left(\frac{R(t)}{r_0}\right)^2\left(1+k\frac{r^2}{4r_0{}^2}\right)^{-2}(d\vec{x})^2 \qquad (58.1)$$

である．

§56 で既に述べたように，座標系 (58.1) からみるとすべてのガス分子（つまりすべての星雲団）は静止している．任意の1個の分子の座標を x^μ，その固有時を τ とすれば，$\dot{x}^0=dx^0/d\tau=c$，$\dot{x}^k=0$ ($k=1, 2, 3$) である．

いま，ガスの $T^{\mu\nu}$ を (18.17) により

$$T^{\mu\nu}=-\left\{\rho u^\mu u^\nu+p\left(\frac{1}{c^2}u^\mu u^\nu+g^{\mu\nu}\right)\right\} \qquad (58.2)$$

とおけば $u^0=c$，$u^k=0$ ($k=1, 2, 3$) であるから

$$T^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}-\rho c^2 & & & \\ & -pg^{11} & & \\ & & -pg^{22} & \\ & & & -pg^{33}\end{pmatrix},$$

あるいは

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & & & \\ & -p & & \\ & & -p & \\ & & & -p \end{pmatrix} \qquad (58.2)'$$

となる．ガスの密度 ρ, 圧力 p は t だけの未知の関数である．

ところで ρ と p の大小を考えるために，たとえば，気体運動論にしたがうと，ガス分子の平均２乗速度を $\overline{v^2}$ とするとき

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{3}\overline{v^2} \qquad \text{あるいは} \qquad \frac{p}{\rho c^2} = \frac{1}{3}\frac{\overline{v^2}}{c^2}.$$

しかし R-W 系からみた星雲団の $\overline{v^2}$ はほとんど０と考えてよいから，p は無視してよいほどに小さい．

さて，Einstein の方程式

$$G^{\mu}{}_{\nu} - \lambda\delta^{\mu}{}_{\nu} = \kappa T^{\mu}{}_{\nu} \qquad (21.6)$$

の（0, 0）成分は§55 の最後の式から

$$\kappa\rho c^2 = -\lambda + \frac{3k}{R(t)^2} + \frac{3R'(t)^2}{c^2 R(t)^2} \qquad (58.3)$$

となる．ここで $R' = dR/dt$ を示す．

また，$\mu = \nu = 1, 2, 3$ の場合にはいずれも

$$-\kappa p = -\lambda + \frac{k}{R^2} + \frac{(R')^2}{c^2 R^2} + \frac{2R''}{c^2 R} \qquad (58.4)$$

となる．ここで λ, k の数値を適当に与えたとき，未知量は $\rho(t)$, $p(t)$ および $R(t)$ である．もし p を無視できるときは，２個の方程式（58.3),（58.4）から $\rho(t)$ と $R(t)$ をきめればよい．これは可能である．しかし $p(t)$ も考慮にいれるときは方程式の数が不足している．これを補うものが ρ と p の間の関係を与えるガスの状態方程式である．それが適当に与えられれば，すべての量が決定され，それに応じてひとつの相対論的宇宙模型ができあがる．しかしそのような解がすべて物理的にみて受けいれることのできるものとは限らない．まず p は負になっては困る．同じことは密度 ρ についてもいえる．そこでつぎの

節で二，三の特別な場合について説明しよう．

§59. 宇宙の静的模型

(58.3)，(58.4) は ρ と p を $R(t)$ の関数として表わしたものである．もし R を t に無関係とすれば，ρ も p もまた t に無関係となり静的宇宙を表わすことになる．しかしこのときは $R_0 = R_G$ となるから，少くとも§57のような方法ではHubbleの法則を導くことはできない．また3°Kのスペクトルをもつ電磁波の存在をどのように理解したらよいか，むずかしい問題となる．このような理由から現在では静的模型は現実の宇宙には適合しないとみなされている．しかし歴史的にはいろいろと興味のある点も多いので，無益かもしれないが紹介する．

本論にはいる前になぜ物質が無限に広がっていては不都合なのか，その理由を説明しよう．仮に無限に広がった宇宙のなかに一様に星が分布していたとする．いま，単位体積中にある星が毎秒 μ という一定の強さの光を放出するとする．任意の1点Pにいる人がすべての星から受ける光のエネルギーは，たとえ μ がどんなに小さくとも，それが正確に0でないかぎり，この人のうける毎秒の光のエネルギーは∞となる．なぜなら，Pを中心とし半径 r と $r+dr$ の球面ではさまれた球殻内にある星から受ける光のエネルギーは，Euclid幾何学が成り立つとすれば，

$$\frac{\mu}{r^2}4\pi r^2 dr .$$

これを r について0から∞まで積分すれば発散する．したがって夜も昼も空は明るいことになる．これは**Olbersのパラドックス**とよばれる．したがって，八方に無限に広がったEuclid空間では具合が悪い．

さて，静的模型ではすべての量が x^0 に無関係であるから，(58.3)，(58.4) は

$$\kappa\rho c^2 = -\lambda + \frac{3k}{R^2}, \tag{59.1}$$

$$\kappa p = \lambda - \frac{k}{R^2} \tag{59.2}$$

となる．したがって，(59.1)＋3×(59.2) から

$$\kappa(\rho c^2 + 3p) = 2\lambda. \tag{59.3}$$

そこで $\lambda = 0$, $\lambda \neq 0$ の場合に分けて考えてみよう．

（**a**） $\lambda = 0$ の場合

ρ, p はいずれも $\rho \geqq 0$, $p \geqq 0$ であるべきであるから，$\lambda = 0$ の場合には (59.3) から $\rho = 0$, $p = 0$ となる．したがって (59.1) から $k = 0$ となる．

それゆえ計量は

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + A^2(d\vec{x})^2, \tag{59.4}$$

$$A = \frac{R}{r_0} = \text{定数}.$$

これは $A\vec{x} \equiv \overset{d}{\vec{x}}'$ とおけば Minkowski の時空となる． また宇宙は完全に空虚である．そこでは特殊相対論が成立する．

（**b**） $\lambda \neq 0$ の場合

まず (59.1)＋(59.2) から，

$$\kappa(\rho c^2 + p) = \frac{2k}{R^2}. \tag{59.5}$$

$\rho \geqq 0$, $p \geqq 0$ であるから $\rho = 0$, $p = 0$ で，さらに $\lambda = 0$ のとき以外は $k = 0$ とはなりえない．また (59.5) から $k = 1$ が唯一の許される場合である．

さらに (59.1), (59.2) の左辺はいずれも $\geqq 0$ であるから

$$\frac{1}{R^2} < \lambda < \frac{3}{R^2}. \tag{59.6}$$

したがって

$$\lambda = O\left(\frac{1}{R^2}\right)$$

となる．

一般相対論を太陽系に応用した際は $\lambda = 0$ とした． 太陽系の問題に登場する，この系に固有の長さといえば，太陽の周囲を回遊する惑星の軌道の半径である．この最大のものを l とするとき，$l \ll R$ であるから

$$\frac{1}{l^2} \gg \frac{1}{R^2} \approx \lambda$$

となる．太陽系の場合，$\lambda=0$ とおいたにもかかわらず，満足のいく程度に理論値と実験値の一致をみたのは当然といえよう．

さきにも述べたように，現実の宇宙では $\rho c^2 \gg p$ である．そこで (59.5) から

$$R^2 \approx \frac{2}{\kappa\rho c^2} \quad \text{あるいは} \quad R \approx \frac{c}{\sqrt{4\pi G\rho}}. \tag{59.7}$$

Einstein が λ 項をつけ加えたのにはいろいろの理由があるが，その中のひとつは宇宙半径 R と，密度 ρ の間の関係を見つけることであった．(59.7) はまさにこの関係式である．しかしその後，Hubble の法則が発見され，一方では R-W 型計量もみつかった．これを用いて，次節に述べるような動的宇宙を表わす Einstein の方程式の解も求められた．この解では λ 項が無くても有限の大きさをもつ宇宙の存在しうることが示された．λ 項を導入することは一般相対論の論理的美観を損うものとして Einstein 自身あまり好まなかったようである．しかし上のように有限の静的宇宙を表わすために，彼は不本意ながら，この項を彼のもともとの美しい理論につけ加えた．ところがこれが上述のような Robertson，Walker の発明により不要となったことは，Einstein 自身，彼の推察の正しくなかったことを指摘されたという理由でシャクにさわったかもしれないが，半面，心中ひそかに喜んだことであろう．

以上をまとめると，計量は

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + \frac{R^2}{1+\frac{u^2}{4}}\{(du)^2 + u^2 d\omega^2\} \tag{59.8}$$

である．ここで

$$d\omega^2 \overset{d}{\equiv} (d\theta)^2 + (\sin\theta\, d\varphi)^2. \tag{59.9}$$

また，R は宇宙に分布する物質の平均密度 ρ と (59.7) という関係で結ばれる．宇宙定数 λ は (59.6) という程度の量である．そこで

$$\rho \approx 10^{-29} \sim 10^{-31}\,\mathrm{g/cm^3}$$

とすれば，(59.7) から

$$R \approx 10^{11} \sim 10^{12}\ \text{光年}$$

となる．この数値は了承できる数値である．なおこのモデルを **Einstein の静**

的宇宙という.

§60. 動的宇宙模型

R は t の関数とする. 既に Einstein の方程式を使って導いた関係式が (58.3) および (58.4) であるから, 状態方程式を使う以外には $R(t)$ を決定する手がかりはない. ここでは $R(t)$ に適当な関数を採用し, それが Hubble の法則を説明できるか否か, ρ, p が負となるような非常識な結果をもたらさないか否かを調べる. これら最低の要請を満たすもののうちで簡単なモデルを, $\lambda=0$, $\lambda\neq 0$ の両方の場合について調べてみよう. なお §57 で Hubble の法則を説明した際に, わかった重要な結論は, $R(t)$ が少くとも現在は t の増加関数であるということである. これは忘れてはならない制約である.

(**a**) $\lambda=0$ の場合

(58.3), (58.4) は

$$\kappa\rho c^2=\frac{3k}{R^2}+\frac{3(R')^2}{c^2R^2}, \tag{60.1}$$

$$-\kappa p=\frac{k}{R^2}+\frac{(R')^2}{c^2R^2}+\frac{2R''}{c^2R}. \tag{60.2}$$

いま (60.1) の t を現在の時刻 t_0 とおき, そのときの R, R', ρ 等の値をそれぞれ R_0, R_0', ρ_0 で表わすことにする. (57.15) から

$$H\overset{d}{\equiv}\frac{R_0'}{R_0}$$

とおけば, (60.1) は

$$\kappa\rho_0c^2-\frac{3H^2}{c^2}=\frac{3k}{(R_0)^2}. \tag{60.1$'$}$$

ここで ρ_0, H に現在わかっている実験値を代入し, (60.1)$'$ の左辺の正負を調べれば, k が ± 1 か 0 かが決定できるはずである. H に対しては, 現在

$$H^{-1}=(5.6\pm 0.6)\times 10^{17}\,\mathrm{sec} \tag{60.3}$$

という値が求まっている. しかし ρ_0 については正確な数値を与えることは至難のことで, (60.1)$'$ の左辺の正負を判断できるほどに信頼できるデータはない. せいぜい $\rho_0\gtrsim 10^{-31}$ という程度しかわかっていない. したがって k についい

てはいまのところ，3つの場合が存在しうることになる．

(60.1) − 3 × (60.2) から

$$\kappa(\rho c^2 + 3p) = -\frac{6R''}{c^2R}. \tag{60.4}$$

この左辺は物理的に考えて負とはなりえない．したがって，$\rho=0$，$p=0$ の場合をのぞけば

$$R'' < 0 \tag{60.5}$$

である．つまり宇宙の膨張の速さは次第に減少しつつある．また減速パラメーター $q_0 \overset{d}{\equiv} -R''R/(R')^2$ は正となる．これは観測結果と一致している．

さて，$R(t)$ の具体的な形を求めるために ρc^2 に比べて p を無視し，$p=0$ とおこう．このときは (60.2) は

$$kc^2 + (R')^2 + 2RR'' = 0 \tag{60.2$'$}$$

となる．これを積分すると

$$(R')^2 = \frac{D_0 - kR}{R}c^2. \tag{60.6}$$

D_0 は積分定数である．これを (60.2)′ に代入すれば

$$D_0 = -\frac{2R^2}{c^2}R'' > 0 \tag{60.7}$$

となる．(60.6) を (60.1) に代入すれば

$$D_0 = \frac{\kappa\rho c^2}{3}R^3 = \left(\frac{4\pi}{3}R^3\rho\right)\frac{2G}{c^2}, \tag{60.8}$$

あるいは

$$D_0 = \frac{2GM}{c^2}, \qquad M = \frac{4\pi}{3}R^3\rho \tag{60.9}$$

となる．

(60.9) からわかるように R，ρ はいずれも t の関数だが $R^3\rho$ は一定値となる．この宇宙の体積は $k=1$ のときは (56.6) に与えたように $2\pi^2R^3$ である．したがって M は宇宙の全質量に比例する．$k=0$，つまり空間が3次元 Euclid 空間ならば，M は半径 R のガス塊の質量を示す．したがって D_0 はこのガス塊（つまり大宇宙全体）の Schwarzschild 半径に相当する．$k=1$ の場合でも，

D_0 は宇宙の Schwarzschild 半径に $2/3\pi$ を掛けたものに相当する．

これから $k=1, 0, -1$ に分けて，モデルを検討してみよう．

(a.1) $k=1$ のとき

いま，パラメーター θ を用いて

$$R = D_0 \sin^2\theta \qquad (60.10)$$

とおく．θ は t の未知の関数である．(60.10) から

$$\frac{dR}{dt} = 2D_0 \sin\theta \cos\theta \frac{d\theta}{dt}$$

となる．これを用いると (60.6) から

$$c(t-\text{const}) = \frac{D_0}{2}(2\theta - \sin 2\theta), \qquad (60.11)$$

$$R(t) = \frac{D_0}{2}(1-\cos 2\theta) \qquad (60.10)'$$

となる．

上の解で，たとえば const $=0$ とおけば，$\theta=0$ のとき $t=0$，$R(t)=0$ となる．これが宇宙の誕生，いわゆる "big-bang" に相当する．実は (60.10)′，(60.11) を求めるのに $p=0$ という仮定をおいた．しかし $t\approx 0$，$R\approx 0$ では ρ は非常に大きく，また p も無視できない．したがって (60.11)，(60.10)′ がこのままの形で宇宙の創生期においても正しく成り立つと考えることは正しくない．

(60.11)，(60.10)′ は θ をパラメーターとしたサイクロイドにほかならない．R の最大値は

$$R_{\max} = D_0 = \frac{2GM}{c^2} \qquad (60.12)$$

である．$R(t)$ は周期的に膨張と収縮をくり返す．なおおもしろいことに，このモデルでは宇宙半径 R は常にその Schwarzschild 半径より小さい．

さて，(60.11)，(60.10)′ を使うと，減速パラメーター q_0 は

$$q_0 = \frac{D_0}{2(D_0-R)} \qquad \text{あるいは} \qquad \frac{R}{D_0} = 1 - \frac{1}{2q_0}. \qquad (60.13)$$

$0 \leqq R/D_0 \leqq 1$ であるから $\infty > q_0 \geqq \frac{1}{2}$ となる．

Hubble の定数 $H=(R'/R)_0$ も q_0 と D_0 で表わされる．それから逆に

$$D_0=\frac{2q_0c}{H(2q_0-1)^{3/2}} \tag{60.14}$$

となる．これを (60.13) に代入すると

$$R=\frac{c}{H\sqrt{2q_0-1}} \tag{60.15}$$

となる．

(60.9) と (60.14) を組合せると，宇宙の“全質量” M も q_0 と H で表わされる．さらに (60.15) と (60.9) の M の式を用いれば ρ も q_0 と H で表わされる．結局，q_0, H を使えば ρ, R, $R_{\max}=D_0$, M がすべてわかる．いま，

$$q_0=1.0, \qquad H^{-1}=(5.6\pm0.6)\times10^{17}\,\mathrm{sec} \tag{60.3}$$

とすれば

$$\left.\begin{aligned} D_0&=3.6\times10^{10}\,\text{光年}, & M&=2.3\times10^{56}\,\mathrm{g}\\ R&=1.8\times10^{10}\,\text{光年}, & \rho&=1.1\times10^{-29}\,\mathrm{g/cm^3} \end{aligned}\right\} \tag{60.16}$$

となる．以上の数値は容認できるものといえよう．

(a.2) $k=0$ のとき

(60.6) は

$$(R')^2=\frac{D_0c^2}{R}$$

となる．この解は

$$R^{3/2}(t)=\frac{3}{2}c\sqrt{D_0}\,t \tag{60.17}$$

である．ただし $t=0$ で $R=0$ という初期条件を用いた．

このモデルも $t=0$ に宇宙が爆発的に誕生したことになる．(60.17) を使うと

$$q_0=\frac{1}{2}.$$

また，現在の時刻を t_0 とすれば

$$H=\frac{2}{3}(t_0)^{-1}$$

となる．(60.17) を (60.1) に代入すると

$$\rho_0 \overset{d}{\equiv} \rho(t_0) = \frac{3}{8\pi G} H^2$$

となる．そこで，H に (60.3) を代入すれば

$$\rho_0 \approx 0.57 \times 10^{-29}\,\mathrm{g/cm^3}\,. \tag{60.18}$$

この値は現在，われわれが是認できる値である．また $q_0 = 1/2$ も現在の観測結果と矛盾しない．そんなわけでこのモデルも，成功したもののひとつとみなすべきである．これを **Friedman の宇宙模型** という．

このモデルの ds^2 は

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{D_0}\ x^0\right)^{4/3} \{(du)^2 + u^2(d\omega)^2\}$$

である．この宇宙では $\lambda = 0$, $k = 0$ であるにもかかわらず前述の Olbers のパラドックスのようなことは起こらない．しかしこの D_0 は $k = 1$ のときと異なり，q_0 と H でそれを表わすわけにはいかない．

(a.3) $k = -1$ のとき

(60.6) は

$$(R')^2 = \frac{D_0 + R}{R} c^2 \tag{60.19}$$

となる．この解も (60.10) と同様にパラメーター θ を用いて

$$\left.\begin{aligned} ct &= \frac{D_0}{2}(\sinh 2\theta - 2\theta) \\ R &= \frac{D_0}{2}(\cosh 2\theta - 1) \end{aligned}\right\} \tag{60.20}$$

のように表わすことができる．ここで $\theta = 0$ のとき $t = 0$, $R = 0$ という初期条件を用いた．このモデルでは $\theta \to \infty$ となれば $t \to \infty$, $R \to \infty$ となる．また (60.19) から

$$\left|\frac{dR}{dt}\right| = c\sqrt{1 + \frac{D_0}{R}} > c\,.$$

ただ $R \to \infty$ ではじめて $|dR/dt| = c$ となる．

このモデルでは $t = 0$ に宇宙は爆発的に誕生し，そのときの $dR/dt = \infty$ で

ある．その後 宇宙は急速に膨張し，Schwarzschild の半径 D_0 をのりこえて，$t \to \infty$ とともに R も∞となる．しかし，宇宙の誕生時に $dR/dt = \infty$ ということは信用しなくてもよい．なぜなら，前にも注意したように，この結論は $p = 0$ が常に成立すると仮定しているからである．実際には $R \approx 0$ のようなとき，この仮定は成立しなくなる．(**a.1**) の場合と同様に種々の量を H, q_0 を用いて表わしてみよう．まず q_0 自身は

$$0 < q_0 = -\frac{RR''}{(R')^2} = \frac{D_0}{2(D_0+R)} < \frac{1}{2} \tag{60.21}$$

である．(60.14) に相当して

$$D_0 = \frac{2q_0 c}{H(1-2q_0)^{3/2}}. \tag{60.22}$$

また (60.1) から

$$\rho = \frac{3q_0H^2}{4\pi G}.$$

ここで前と同様に H^{-1} として (60.3) を用い， $q_0 = 1/2$ とすれば，現在の時刻における密度 $\rho(t_0)$ は

$$\rho_0 \overset{d}{\equiv} \rho(t_0) = 0.58 \times 10^{-29}\,\mathrm{g/cm^3} \tag{60.23}$$

となる．この値も現在のわれわれの知識からみて，無理のない値といえる．

以上をまとめると $k = 1, 0, -1$ に対応して $q_0 > \frac{1}{2}$, $q_0 = \frac{1}{2}$, $q_0 < \frac{1}{2}$ となる．したがって q_0 の値が正確にわかれば， k の値がきまり， ひいては空間がどのようなものか決定される．しかしいまのところ，この決定は無理である．上にならべた3つのモデルの中で， $k = 1$, の場合が幾分他の2つのそれより優れているように思われる．なお，しばしば注意したように，これらのモデルは $p = 0$ という仮定に基づいている．したがって誕生期の宇宙のように，ガスが超高密度，超高圧の状態にあるときは上のモデルはいずれも役に立たない．そのようなときは $p \neq 0$ として p と ρ の間の関係を与える状態方程式を利用しなければならない．しかしそのような超高密度ガスの状態方程式がどのようなものか，現在のわれわれにはまだわからない．

（b）$\lambda \neq 0$の場合

元来動的宇宙模型を考えようとした動機はλ項なしでも宇宙模型が作れることを示そうという点にあった．したがって，$\lambda \neq 0$で，そのうえ動的な宇宙模型を考えることは余計なことのように思われる．しかし一応，これについても簡単に説明しよう．なぜならこのなかに有名な**de-Sitterの宇宙模型**が含まれるからである．

de-Sitterは

$$\frac{R'}{R} = H = (t\text{ に無関係な定数}) \tag{60.24}$$

とおいた．この解は

$$R(t) = R_0 e^{Ht}, \qquad R_0 = \text{定数} \tag{60.25}$$

である．この場合Hubbleの法則は正確に成り立つ．

いま，遠方の星雲（その座標をu_G）から半径方向にそって原点にいる観測者まで光が来るとする．光が発射された時刻をt_G，観測者に到達した時刻をt_0，この瞬間における星雲と原点の間の直線距離をLとすれば，(57.4)，(57.13)から（θ, φは一定とした）

$$L = R_0 l = -R_0 \int_{u_G}^{0} \frac{du}{1 + k\dfrac{u^2}{4}} = cR_0 \int_{t_G}^{t_0} \frac{dt}{R(t)}.$$

これに(60.25)を代入すると

$$L = \frac{c}{H}\left\{\frac{R(t_0)}{R(t_G)} - 1\right\} = \frac{cz}{H} \tag{60.26}$$

となる．ここでzは(57.6)により

$$z = \frac{R(t_0)}{R(t_G)} - 1 \tag{57.6}$$

である．(60.26)はHubbleの法則にほかならない．

(60.25)のすぐれた点は，tが有限であるかぎり$R(t)$も有限であるということである．tは$-\infty < t < \infty$であるから宇宙の誕生や死について考える必要はない．

Einsteinの方程式(58.3)，(58.4)に(60.25)を代入すると

$$\kappa\rho c^2 = -\lambda + \frac{3k}{R_0{}^2} e^{-2Ht} + \frac{3}{c^2} H^2, \tag{60.27}$$

$$-\kappa p = -\lambda + \frac{k}{R_0{}^2} e^{-2Ht} + \frac{3H^2}{c^2}. \tag{60.28}$$

いま $k=1$ とする．$t \to -\infty$ とすれば (60.28) の右辺は $+\infty$ となるから，p は $-\infty$ になる．したがって $k=+1$ はありえない．逆に $k=-1$ とすれば $t \to -\infty$ に対して (60.27) から $\rho \to -\infty$ となる．したがって $k=-1$ も許されない．結局 $k=0$ だけが許される．そのときは

$$\kappa\rho c^2 = -\lambda + \frac{3}{c^2} H^2 = -\kappa p.$$

したがって $\rho = p = 0$ のときだけが許される．そこで，結局

$$\lambda = \frac{3}{c^2} H^2 \tag{60.29}$$

となる．H として (60.3) を用いれば

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} \approx 1.8 \times 10^{10} \text{ 光年}$$

となる．

要するに de-Sitter の宇宙模型では $\rho=0$，$p=0$ である．その ds^2 は

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + R_0{}^2 e^{Ht}(du^2 + u^2 d\omega^2) \tag{60.30}$$

であたえられる．

de-Sitter の宇宙の ds^2 は，普通 (60.30) とは異なるつぎのような形式がよく知られている．まず，5次元 Minkowski 型の空間内に一葉双曲面

$$R_0{}^2 = -(y^0)^2 + \sum_{\mu=1}^{4} (y^\mu)^2 \tag{60.31}$$

を考える．この空間の距離の定義は

$$ds^2 = -(dy^0)^2 + \sum_{\mu=1}^{4} (dy^\mu)^2 \tag{60.32}$$

とする．ここで (60.31) という曲面上の2点の間の距離を求めてみよう．

いま $y^0 \cdots y^4$ をパラメーター $x^{0\prime}, \eta, \theta, \varphi$ を使って

$$y^0 = R_0\sqrt{1-\eta^2}\sinh(x^{0\prime}/R_0), \qquad y^1 = R_0\eta\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y^2 = R_0\eta\sin\theta\sin\varphi, \qquad y^3 = R_0\eta\cos\theta,$$
$$y^4 = R_0\sqrt{1-\eta^2}\cosh(x^{0\prime}/R_0)$$

とおけば，これらは (60.31) を満足する．これを (60.32) に代入すると

$$ds^2 = -(1-\eta^2)(dx^{0\prime})^2 + \frac{(R_0)^2}{1-\eta^2}d\eta^2 + (R_0)^2\eta^2 d\omega^2 \qquad (60.33)$$

となる．$d\omega^2$ は (59.9) に与えられている．これをみると計量テンソルの成分はすべて $x^{0\prime}$ に無関係である．したがって静的宇宙模型の仲間にいれられる．

この座標系では $\dot{x}^{0\prime} = c$, $\dot{\eta} = 0$, $\dot{\theta} = 0$, $\dot{\varphi} = 0$ は測地線とはならない．したがって，この系からみるとき物質は空間的に静止しているわけにはいかない．そこで，これを R-W 型の計量となるように変換をしてみよう．

いま，

$$\left.\begin{aligned} x^{0\prime} &= x^0 - \frac{R_0}{2}\log(1-u^2e^{2x^0/R_0}) \\ \eta &= ue^{x^0/R_0} \end{aligned}\right\} \qquad (60.34)$$

θ, φ はそのまま

により $(x^{0\prime}, \eta) \to (x^0, u)$ に座標変換をしよう．初等的な，しかし面倒な計算をすれば，(60.33) は

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + R_0{}^2e^{Ht}(du^2 + u^2d\omega^2) \qquad (60.35)$$

となる．ただし

$$H = \frac{2c}{R_0} \qquad (60.36)$$

という関係が追加される．(60.35) は (60.30) と全く同じ形をしている．ただ (60.30) では R_0 と H の間には特に関係はない．しかし (60.35) の原形である (60.33) は1個のパラメーター R_0 をもっているだけだったので，(60.35) の R_0 と H には (60.36) という条件がでてきたわけである．

de-Sitter のモデルは宇宙の生死を論ずる必要がないという点で，まことに好都合なものであるが，それが $\rho = 0$, $p = 0$ という空虚な宇宙にしか役立た

ないということは致命傷といえよう．さらに減速パラメーター q_0 も

$$q_0 = -\frac{R_0 R_0''}{(R_0')^2} = -1.$$

これは現在の観測事実と逆符号である．これもまた大きな欠点といえよう．

第10章　重力場の理論の正準形式

§61. 場の理論の正準形式の概説

重力場の方程式を正準形式にかくことは，理論的興味だけからでなく，重力場の量子論をつくるためにも，まずやらねばならない問題である．特に後にも述べるように，Einstein の方程式は，それが一般座標変換に対して不変という性質をもっているために，それの正準形式へのかきかえにあたり，種々のむずかしい問題に出会う．したがって，この問題は，たとえ量子論への移行ということをぬきにしても，是非とも考えねばならないことである．

質点力学において運動方程式を正準形式にかくにはどうすればよいかは，読者のよく知っていることである．場の理論ではそれがどのように修正されるかについて，この節で概説しよう．このことに関して既に承知している読者は次の節から読みはじめてもらいたい．

話を簡単にするために2次元の時空という仮想的世界を考えることにする．すなわち，空間も時間と同様に1次元の広がりをもつものとする．この世界の中にスカラー場 $\varphi(x, t)$ が存在するとしよう．その振舞は，作用積分

$$I=\int dt\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{L}(\varphi, \varphi_x, \varphi_t)dx\right\} \tag{61.1}$$

から変分法で導かれる方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \varphi}-\partial_x\left(\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \varphi_x}\right)-\partial_t\left(\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \varphi_t}\right)=0 \tag{61.2}$$

により規定されるものとする．ここで

$$\varphi_x \stackrel{d}{\equiv} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \varphi_t \stackrel{d}{\equiv} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

である．$\int \boldsymbol{L}\,dx \stackrel{d}{\equiv} \bar{L}$ を Lagrange 関数といい，(61.2) を Lagrange 形式にかかれた場の方程式という．

いま，空間軸（x-軸）にそって間隔 Δ の目盛をつける．したがって，任意

の点の位置 x は，その点をさしはさむ目盛の値 n と $n+1$ により（注： n は正，および負のすべての整数）

$$n\varDelta \leqq x < (n+1)\varDelta$$

のように表わされる．このような点における φ の値 $\varphi(x, t)$ を，近似的に

$$q_n(t) \overset{d}{\equiv} \varphi(x = n\varDelta, t)$$

で表わすことにする．また，その微分 $\varphi_x(x, t)$ も近似的に

$$\frac{q_{n+1}(t) - q_n(t)}{\varDelta}$$

におきかえる．さらに $\varphi_t(x)$ は $\dot{q}_n(t)$ とかくことにする．このようにすると(61.1) は

$$I = \int \bar{L}(t)dt \overset{d}{\equiv} \int \sum_{n=-\infty}^{\infty} L(n, t)dt \qquad (61.1)'$$

となる．ここで

$$\bar{L} \overset{d}{\equiv} \sum_{n=-\infty}^{\infty} L(n, t) \overset{d}{\equiv} \sum_{n=-\infty}^{\infty} L\left\{q_n(t), \frac{q_{n+1} - q_n}{\varDelta}, \dot{q}_n(t)\right\}\varDelta \qquad (61.3)$$

である．q_n を使うと場の方程式 (61.2) は

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial q_n} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_n}\right) = 0 \qquad (-\infty < n < \infty) \qquad (61.2)'$$

のようになる．これは $\bar{L}$ が，$q_n(t)$ を座標とする無限個の質点系の Lagrange 関数であることを示している．

質点系の状態を，各質点の位置 q_n と速度 $\dot{q}_n$ で表わす代りに，q_n と，それに正準共役な運動量 $p_n(t)$ で表わすことにする．各 $p_n(t)$ は等式

$$p_n(t) = \frac{\partial L(n, t)}{\partial \dot{q}_n} \qquad (61.4)$$

により $\dot{q}_n$ の関数と考えられる．あるいは逆に (61.4) を $\dot{q}_n$ で解くと

$$\dot{q}_n(t) = F\left\{p_n(t), q_n(t), \frac{q_{n+1} - q_n}{\varDelta}\right\} \overset{d}{\equiv} F_n(p, q) \qquad (61.4)'$$

とかくこともできる．q_n, p_n $(-\infty < n < \infty)$ を質点系の **正準力学変数**（略して **正準変数**）という．

この系の Hamiltonian は，一般力学の処法によれば

$$\bar{H} = \sum_n \{p_n(t)F_n(p, q) - L(n, t)\} \tag{61.5}$$

で与えられる．この右辺の $L(n, t)$ の中に含まれる $\dot{q}_n(t)$ は (61.4)′ によって $F_n(p, q)$ におきかえてあるものとする．したがって $\bar{H}$ は p_n, q_n だけの関数である．このことに注意し，さらに (61.4) を考慮すると，(61.2)′ は

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial q_n}, \tag{61.6a}$$

また (61.4)′ は

$$\frac{dq_n(t)}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_n} \tag{61.6b}$$

となる．一般に正準変数の任意の関数 $\phi(p, q)$ があるとき，(61.6) を使うと

$$\frac{d}{dt}\phi\{p(t), q(t)\} = \sum_n \left\{\frac{\partial\phi}{\partial q_n}\frac{\partial\bar{H}}{\partial p_n} - \frac{\partial\phi}{\partial p_n}\frac{\partial\bar{H}}{\partial q_n}\right\} \tag{61.7}$$

となる．(61.6a), (61.6b) を**正準運動方程式**という．

ここで **Poisson 括弧**を定義しよう．いま A, B は正準変数 $p_n(t)$, $q_n(t)$ $(-\infty < n < \infty)$ の任意の関数とする．

$$[A, B] \overset{d}{\equiv} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial A}{\partial q_n}\frac{\partial B}{\partial p_n} - \frac{\partial B}{\partial q_n}\frac{\partial A}{\partial p_n}\right) \tag{61.8}$$

を A, B の Poisson 括弧という．この定義から

$$\left.\begin{aligned} &[q_n(t), q_m(t)] = 0, \qquad [p_n(t), p_m(t)] = 0, \\ &[q_n(t), p_m(t)] = \delta_{nm} \end{aligned}\right\} \tag{61.9}$$

が容易に導かれる．また (61.6a), (61.6b) はそれぞれ

$$\frac{dp_n}{dt} = [p_n, \bar{H}], \qquad \frac{dq_n}{dt} = [q_n, \bar{H}] \tag{61.10}$$

のようにかきかえられる．同様に (61.7) は

$$\frac{d\phi}{dt} = [\phi, \bar{H}] \tag{61.11}$$

となる．

以上は場の理論を質点力学の形式におきかえたものである．ここで $\Delta \to 0$ という極限をとり，もとの場の理論に立ちもどってみよう．

まず，(61.4) から

$$\pi(x,\ t) \overset{d}{\equiv} \lim_{\varDelta\to 0}\frac{1}{\varDelta}p_n(t) = \frac{\partial \boldsymbol{L}(x,\ t)}{\partial \varphi_t(x,\ t)} \tag{61.12}$$

とおく．これに応じて (61.9) は

$$\left.\begin{aligned} &[\varphi(x,\ t),\ \varphi(x',\ t)] = 0, \qquad [\pi(x,\ t),\ \pi(x',\ t)] = 0, \\ &[\varphi(x,\ t),\ \pi(x',\ t)] = \delta(x-x') \end{aligned}\right\} \tag{61.13}$$

となる．

Hamiltonian は (61.5) から

$$\overline{H} = \int_{-\infty}^{\infty}\Big[\pi(x,\ t)F(\pi,\ \varphi,\ \varphi_x) - \boldsymbol{L}\{\varphi,\ \varphi_x,\ F(\pi,\ \varphi,\ \varphi_x)\}\Big]dx \tag{61.14}$$

となる．ここで $F(\pi,\ \varphi,\ \varphi_x)$ とは (61.4)′ に相当するもので，(61.12) を φ_t について解いた関係式

$$\varphi_t(x,\ t) = F\{\pi(x,\ t),\ \varphi(x,\ t),\ \varphi_x(x,\ t)\} \tag{61.4$''$}$$

により与えられる．$\overline{H}$ は φ と π の汎関数である．

(61.6a)，(61.6b) はつぎのようにかきかえられる：

$$\frac{\partial \pi(x,\ t)}{\partial t} = -\frac{\delta \overline{H}}{\delta\varphi(x,\ t)}, \qquad \frac{\partial\varphi(x,\ t)}{\partial t} = \frac{\delta\overline{H}}{\delta\pi(x,\ t)}. \tag{61.6$'$}$$

上の式の汎関数微分 $\delta\overline{H}/\delta\varphi$ とは

$$\frac{\delta\overline{H}}{\delta\varphi(x,\ t)} = \lim \frac{\{\overline{H}[\varphi'] - \overline{H}[\varphi]\}}{\displaystyle\int\{\varphi'(x,\ t) - \varphi(x,\ t)\}dx} \tag{61.15}$$

を意味する．ここで φ' とは

$$\varphi'(x,\ t) = \begin{cases} \varphi + \delta\varphi & : \quad \text{特定の点 } x \text{ を包む小さな領域 } \omega \text{ の中で,} \\ \varphi & : \quad \text{その他の点で} \end{cases}$$

のような関数である．また lim とは ω を 0 にするとともに $\delta\varphi$ も 0 に移行させることを意味する．したがって

$$\frac{\delta\overline{H}}{\delta\varphi(x,\ t)} = \frac{\partial\boldsymbol{H}(x,\ t)}{\partial\varphi(x,\ t)} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial\boldsymbol{H}(x,\ t)}{\partial\varphi_x(x,\ t)}\right\}$$

である．同様に

$$\frac{\delta\overline{H}}{\delta\pi(x,\ t)} = \frac{\partial\boldsymbol{H}(x,\ t)}{\partial\pi(x,\ t)}$$

である．ここで $\boldsymbol{H}$ は

$$\boldsymbol{H}(x,\ t) \overset{d}{\equiv} \pi(x,\ t)F\{\pi(x,\ t),\ \varphi(x,\ t),\ \varphi_x(x,\ t)\} - \boldsymbol{L}(x,\ t)$$

である．

(61.15) の定義を考慮すると，(61.8) は $\varDelta\to 0$ の極限で

$$[A,\ B] = \lim_{\varDelta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\partial A}{\varDelta\cdot\partial q_n}\frac{\partial B}{\varDelta\cdot\partial\pi(x,\ t)} - \frac{\partial B}{\varDelta\cdot\partial q_n}\frac{\partial A}{\varDelta\cdot\partial\pi(x,\ t)}\right\}\varDelta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\delta A}{\delta\varphi(x,\ t)}\frac{\delta B}{\delta\pi(x,\ t)} - \frac{\delta B}{\delta\varphi(x,\ t)}\frac{\delta A}{\delta\pi(x,\ t)}\right\}dx \tag{61.8$'$}$$

となる．これを使うと (61.11) は，

$$\frac{d\psi[\varphi,\ \pi]}{dt} = [\psi,\ \bar{H}] \tag{61.11$'$}$$

のように全く同じ形式になる．ただし右辺の Poisson 括弧の定義は (61.8)′ の意味とする．

以上は 2 次元時空におけるスカラー場の方程式を正準形式にかきかえる場合の処方箋である．これを現実の 4 次元世界に移すにはどうすればよいかは容易に想像ができよう．

これから結果だけをまとめてかく．いま，N 個の成分をもつ場 $\varphi_A(x)$ $(A = 1, 2, \cdots, N)$ があるとする．これの Lagrange 関数（正確にいえば $\int \boldsymbol{L}\, d^3x$ が Lagrange 関数である）

$$\boldsymbol{L}(x) \overset{d}{\equiv} \boldsymbol{L}\{\varphi_A(x),\ \varphi_{A,\mu}(x)\}$$

は与えられているものとする．ここで $\varphi_{A,\mu} \overset{d}{\equiv} \partial\varphi_A/\partial x^\mu$ である．$\varphi_A(x)$ に正準共役な量を $\pi^A(x)$ とする．これは $\varphi_{A,0}$ と

$$\pi^A(x) = \frac{\partial\boldsymbol{L}(x)}{\partial\varphi_{A,0}(x)} \tag{61.16}$$

という関係で結ばれている．これを $\varphi_{B,0}$ について解けば

$$\varphi_{B,0}(x) = \boldsymbol{F}_B\{\pi,\ \varphi,\ \varphi_{,k}\} \tag{61.16$'$}$$

という形式に表わされる．*

---

* 本章でもラテン字は 1～3，ギリシャ字は 0～3 とする．ラテン，ギリシャいずれの字についても，同一のものが 2 重にでてきたときは和をとることにする．

Hamiltonian $\bar{H}$ は

$$\left.\begin{aligned}\bar{H} &\overset{d}{\equiv} \int \boldsymbol{H}(\vec{x}, t) d^3x,\\ \boldsymbol{H}(\vec{x}, t) &\overset{d}{\equiv} \sum_{A=1}^{N} \pi^A(x) F_A\{\pi, \varphi, \varphi_{,k}\} - \boldsymbol{L}(\varphi, \varphi_{,k}, \varphi_{,0} = F)\end{aligned}\right\} \quad (61.17)$$

で与えられる．Poisson 括弧の定義は任意の量 $G(\varphi, \pi)$，$K(\varphi, \pi)$ について

$$[G, K] \overset{d}{\equiv} \sum_{A=1}^{N} \int \left\{ \frac{\delta G}{\delta\varphi_A(\vec{x}, t)} \frac{\delta K}{\delta\pi^A(\vec{x}, t)} - \frac{\delta K}{\delta\varphi_A(\vec{x}, t)} \frac{\delta G}{\delta\pi^A(\vec{x}, t)} \right\} d^3x \quad (61.18)$$

である．特に正準変数の Poisson 括弧は

$$\left.\begin{aligned}&[\varphi_A(\vec{x}, t), \varphi_B(\vec{x}', t)] = 0\\ &[\pi^A(\vec{x}, t), \pi^B(\vec{x}', t)] = 0\\ &[\varphi_A(\vec{x}, t), \pi^B(\vec{x}', t)] = \delta^B{}_A \delta(\vec{x} - \vec{x}')\end{aligned}\right\} \quad (61.19)$$

である．

正準形式にかかれた場の方程式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_A(\vec{x}, t)}{\partial t} &= [\varphi_A(\vec{x}, t), \bar{H}]\\ &= \frac{\partial \boldsymbol{H}(\vec{x}, t)}{\partial\pi^A(\vec{x}, t)},\\ \frac{\partial\pi^A(\vec{x}, t)}{\partial t} &= [\pi^A(\vec{x}, t), \bar{H}]\\ &= -\frac{\partial \boldsymbol{H}(\vec{x}, t)}{\partial\varphi_A(\vec{x}, t)} + \partial_k \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{H}(\vec{x}, t)}{\partial\varphi_{A,k}(\vec{x}, t)} \right\}\end{aligned}$$

である．

ここで一言注意を述べたい．上の結果からもわかるように，正準形式は，時間 x^0 を特別扱いする方法である．したがって，一見したところでは理論全体の座標変換に対する不変性を破っているように思われる．この点がこの形式の弱点である．しかし現象の進展を時間的に追求するのには好都合である．さらに場の方程式を初期値問題の形でとりあげるのにも適している．そのうえに，

はじめにも述べたように，理論全体を量子化するには，必ず通らねばならない理論形式である．近頃，Feynman の方法と称する量子化法が流行しているが，これを用いる場合でも，厳密にいえば，古典論のワクのなかで，正準形式にかきかえておくことが必要である．これから上述の方法を重力場 $g_{\mu\nu}(x)$ に応用しよう．

§62．重力場の正準変数

前節の終りで述べたように正準形式に移ることにより時間 x^0 は空間座標 x^k $(k=1, 2, 3)$ と区別される．今後は $x^0=a=$ 一定 という空間的超曲面の層により全時空が満たされていると考える．各超曲面の上には3次元空間座標系 x^k の網目が張られている．そこで，今後考える座標変換はつぎの2種類に大別される：

（1）

$$\left.\begin{aligned} x^0 &\to x^{0\prime} = x^0 \ (\text{もとのまま}) \\ x^k &\to x^{k\prime} = f^k(x^0, x^1, \cdots, x^3). \end{aligned}\right\} \qquad (62.1)$$

これは，空間的超曲面群はそのままに保ち，ただ面上の座標網だけを変更するものである．

（2）

$$\left.\begin{aligned} x^0 &\to x^{0\prime} = f^0(x^0, x^1, \cdots, x^3) \\ x^k &\to x^{k\prime} = x^k \ (\text{もとのまま}). \end{aligned}\right\} \qquad (62.2)$$

これは空間的超曲面の形を変える変換である．

変換（62.1）は

$$x^0 = x^{0\prime}, \qquad x^k = \varphi^k(x^{0\prime}, x^{1\prime}, \cdots, x^{3\prime}) \qquad (62.1)'$$

とかくこともできる．これに対して

$$g_{ik}(x) \to g_{ik}{}'(x') = \frac{\partial x^m}{\partial x^{i\prime}} \frac{\partial x^n}{\partial x^{k\prime}} g_{mn}(x)$$

となる．したがって g_{ik} は3次元共変テンソルとして変換される．

一方，g^{00} は

$$g^{00}(x)\to g^{00\prime}(x')=\frac{\partial x^{0\prime}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{0\prime}}{\partial x^{\nu}}g^{\mu\nu}=g^{00}(x).$$

つまり，g^{00} は (62.1) に対して不変である．そこでこれを

$$g^{00}\overset{d}{\equiv}-\left\{\frac{1}{\lambda(x)}\right\}^2 \tag{62.3}$$

とおく．$\lambda(x)$ は (62.1) に対して不変な関数である．ついでに

$$g_{0k}\overset{d}{\equiv}\lambda_k(x) \tag{62.4}$$

とおく．λ_k は (62.1) に対して3次元共変ベクトルとはならない．しかし f^k が x^0 に無関係のときは

$$\lambda_k{}'(x')=\frac{\partial x^l}{\partial x^{k\prime}}\lambda_l(x)$$

となるから，共変ベクトルとなる．

さて，重力場を正準形式にかきかえるにあたり，$g_{\mu\nu}$，$g^{\mu\nu}$ のうちで何を独立変数として採用するかは，それ以後の諸形式が簡単になるか否かと密接に結びつくので，深く考えねばならない問題である．経験によれば，上にならべた $g_{ik}(x)$，$\lambda(x)$ および $\lambda_k(x)$ を独立変数とみなすのが最も好都合のようである．これら10個の量を使うと他の10個は以下のように表わされる．

まず，g_{ik} を後の都合上

$$e_{ik}(x)\overset{d}{\equiv}g_{ik}(x)$$

とかくことにする．これの逆マトリックス $e^{ik}(x)=e^{ki}(x)$ を

$$e^{ij}(x)e_{jk}(x)\overset{d}{\equiv}\delta^i{}_k$$

によって定義する．これを使うと

$$\left.\begin{aligned}&g^{0i}=\frac{e^{ik}\lambda_k}{\lambda^2}, \qquad g_{00}=\lambda^k\lambda_k-\lambda^2,\\&g^{ik}=e^{ik}-\frac{\lambda^i\lambda^k}{\lambda^2}\end{aligned}\right\} \tag{62.5}$$

となる．ここで

$$\lambda^k\overset{d}{\equiv}e^{ki}\lambda_i$$

である．

これから従来用いてきた4次元世界のアフィン係数を ${}^{(4)}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ とかくことにする．これに対して e_{ik}, e^{ik} から作られる3次元のアフィン係数は単に $\Gamma^{l}{}_{mn}$ とかくことにする．${}^{(4)}\Gamma$ と Γ の関係は

$$
{}^{(4)}\Gamma^{i}{}_{kl} = \Gamma^{i}{}_{kl} - \frac{\lambda^i\lambda^j}{2\lambda^2}(e_{jk,l} + e_{lj,k} - e_{kl,j}) + \frac{\lambda^i}{2\lambda^2}(\lambda_{k,l} + \lambda_{l,k} - \partial_0 e_{kl}) \tag{62.6}
$$

となる．あるいは $\Gamma^{i}{}_{kl}$ を用いた3次元共変微分を単に ∇_k とかくことにすると*

$$
{}^{(4)}\Gamma^{i}{}_{kl} = \Gamma^{i}{}_{kl} + \frac{\lambda^i}{2\lambda^2}(\nabla_l\lambda_k + \nabla_k\lambda_l - \partial_0 e_{kl}) \tag{62.6$'$}
$$

となる．

あるいは

$$
K_{kl} \overset{d}{\equiv} \frac{\partial_0 e_{kl} - \nabla_k\lambda_l - \nabla_l\lambda_k}{2\lambda} \tag{62.7}
$$

とおけば

$$
{}^{(4)}\Gamma^{i}{}_{kl} = -\frac{\lambda^i}{\lambda}K_{kl} + \Gamma^{i}{}_{kl} \tag{62.6$''$}
$$

となる．

同様に

$$
\begin{aligned}
{}^{(4)}\Gamma^{0}{}_{kl} &= \frac{1}{\lambda}K_{kl}, \qquad (62.8)\\
{}^{(4)}\Gamma^{i}{}_{0k} &= \left(e^{ij} - \frac{\lambda^i\lambda^j}{2\lambda^2}\right)(\lambda K_{jk} + \nabla_k\lambda_j) + \frac{\lambda^i}{2\lambda^2}\partial_k(\lambda^l\lambda_l - \lambda^2),\\
{}^{(4)}\Gamma^{i}{}_{00} &= \frac{\lambda^i}{2\lambda^2}\partial_0(\lambda_l\lambda^l - \lambda^2) + \frac{1}{2}\left(e^{ik} - \frac{\lambda^i\lambda^k}{2\lambda^2}\right)\{2\partial_0\lambda_k - \partial_k(\lambda^l\lambda_l - \lambda^2)\},\\
{}^{(4)}\Gamma^{0}{}_{0i} &= -\frac{1}{2\lambda^2}\partial_i(\lambda^l\lambda_l - \lambda^2) - \frac{\lambda^k}{\lambda}K_{ki} + \frac{\lambda^k\lambda^j}{\lambda^2}\Gamma_{j,ik},\\
{}^{(4)}\Gamma^{0}{}_{00} &= -\frac{1}{2\lambda^2}\partial_0(\lambda_l\lambda^l - \lambda^2) + \frac{\lambda^k}{2\lambda^2}\partial_k(\lambda^l\lambda_l - \lambda^2)
\end{aligned}
$$

となる．

---

* ${}^{(4)}\Gamma$ を用いた従来の意味の4次元共変微分は ${}^{(4)}\nabla_\mu$ とかくことにする

ここで

$$\Gamma_{j,ik} \overset{d}{\equiv} e_{jl}\Gamma^{l}{}_{ik} = \frac{1}{2}(e_{ji,k} + e_{kj,i} - e_{ik,j})$$

である．

つぎに $\det(g_{\mu\nu}) \overset{d}{\equiv} g$ を e_{ik} や λ で表わしてみよう．g の要素 g_{00} に対する余行列式を M^{00} とすれば

$$g^{00} = \frac{M^{00}}{g} = \frac{1}{g}\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ e_{31} & \cdot\cdot & \cdot\cdot \end{vmatrix}.$$

いま，3次元行列式 $\det(e_{ik})$ を

$$e \overset{d}{\equiv} \det(e_{ik})$$

とおけば

$$g = \frac{1}{g^{00}}e = -\lambda^2 e \tag{62.9}$$

となる．

上に求めた g や ${}^{(4)}\Gamma$ を使って4次元のスカラー曲率 ${}^{(4)}R$ と3次元空間のスカラー曲率 R との関係を求めてみよう．ちょっと面倒な計算の後につぎの結果が求まる：

$$\sqrt{-g}\;{}^{(4)}R \overset{d}{\equiv} {}^{(4)}\boldsymbol{R} = \lambda\sqrt{e}\,(R - K_{ij}K^{ij} + K^2)$$
$$- 2\partial_0(\sqrt{e}\,K) + 2\partial_i(\sqrt{e}\,e^{ik}\partial_k\lambda + \lambda^i\sqrt{e}\,K). \tag{62.10}$$

ここで

$$K^{ij} \overset{d}{\equiv} e^{im}e^{jn}K_{mn}, \qquad K \overset{d}{\equiv} e^{ij}K_{ij}$$

である．また

$$R_{ik} \overset{d}{\equiv} \partial_i\Gamma^{l}{}_{kl} - \partial_l\Gamma^{l}{}_{ik} + \Gamma^{l}{}_{im}\Gamma^{m}{}_{kl} - \Gamma^{l}{}_{ik}\Gamma^{m}{}_{lm},$$
$$R \overset{d}{\equiv} e^{ik}R_{ik}$$

である．

そこで，重力場の作用積分は (22.2)，(22.3) から*

* この章では計算の便宜上，$c=1$ という単位系を用いる．

$$I = -\frac{1}{2\kappa}\int {}^{(4)}\boldsymbol{R}\, d^4x,$$

この右辺に (62.10) を代入するとき，(62.10) の最後の 2 つの項は場の方程式を導くのには役立たない．したがってこれらをはぶくと ($x^0 = t$ とおくとき)

$$\left.\begin{aligned} I &= \int \bar{L}\, dt, \\ \bar{L} &= \frac{1}{2\kappa}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\sqrt{e}\,(K^{ij}K_{ij} - K^2 - R)d^3x \end{aligned}\right\} \quad (62.11)$$

となる．この $\bar{L}$ は空間座標の一般変換

$$\left.\begin{aligned} x^k \to x^{k\prime} &= f^k(x^1, x^2, x^3), \\ x^0 &= \text{不変} \end{aligned}\right\} \quad (62.12)$$

に対して不変である．実は Lagrange 関数 $\bar{L}$ としては必ずしも (62.11) には限らない．たとえば (62.10) の最後の項を $\bar{L}$ の被積分関数に付け加えてもかまわない．さきにも述べたように，このような追加項は場の方程式に一切影響を与えない．一般に e_{ik}，やその微分の或る関数で，3 個の成分をもつ量を $\boldsymbol{V}^k$ とするとき，(62.11) の代りに

$$\bar{L}' = \bar{L} + \int \partial_k \boldsymbol{V}^k\, d^3x$$

としても場の方程式は変わらない．ただ $\boldsymbol{V}^k$ に対するきめ手として $\bar{L}'$ も変換 (62.12) に対して不変という条件をつける必要がある．しかし $\bar{L}'$ に対応する Hamiltonian, すなわち重力場のエネルギーは，$\bar{L}$ から導かれたエネルギーよりも $\int \partial_k \boldsymbol{V}^k d^3x$ だけ減少する．重力場以外の場では，このような積分の値は実は 0 となる．すなわち Gauss の定理により，この 3 次元空間積分は全空間を包む大きな閉曲面上の積分に等しい．しかしそのような境界面上では重力場以外の場は急速に 0 となるから，この積分の値は 0 に等しい．したがって，Lagrange 関数 $\bar{L}$ の選び方には任意性は残らない．

重力場の場合には事情が異なる．いまわれわれが扱っている時空は空間的にも時間的にも無限に広がっている開いた時空とする．もし，物質系が空間的に有限な領域に局在しているときは，つまり孤立系の場合には，十分遠方で計量

が Minkowski のそれに近づくように座標系を選ぶことが必ずできる（宇宙項はないものとする）．したがって，$r\to\infty$ に対して

$$\left.\begin{aligned} g_{\mu\nu} &\to \eta_{\mu\nu} + O\left(\frac{1}{r}\right), \\ r &= \sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2} \end{aligned}\right\} \tag{62.13}$$

とおくことができる．そのような場合には上に述べた追加項が 0 とならない場合もある．したがって，重力場の場合には，無限遠における表面積分だからといって，吟味もせずに棄てるわけにはいかない．これは重力場の大きな特徴である．この不定項をきめるには，まずそれが変換（62.12）に対して不変であること，つぎに，（62.13）という条件を満たす座標系を用いた場合，全系のエネルギーが（29.9）にあたえられたものと一致することという要請をつければよい．この 2 つの条件で大体この種の任意性はとり除かれる．そこで，これからしばらくは Lagrange 関数を

$$\bar{L} \overset{d}{\equiv} \int \boldsymbol{L}\, d^3x \overset{d}{\equiv} \frac{1}{2\kappa}\int \{\lambda\sqrt{e}\,(K^{ij}K_{ij}-K^2-R)+\partial_k \boldsymbol{V}^k\}\, d^3x \tag{62.14}$$

とおく．$\boldsymbol{V}^k$ は e_{ik}, $e_{ik,l}$ だけからできた 3 個の成分を持つ量である．しかしその形は未定としておく．また，（62.13）のような座標系では $r\to\infty$ に対して

$$\boldsymbol{V}^k = O(r^{-2})$$

とする．この条件は，全系を包む大きな境界面上の積分

$$\iint \boldsymbol{V}^k\, d\sigma_k$$

が 0 でない有限の値をもつために必要なものである．

（62.14）を Lagrange 関数とする作用積分 I から λ, λ_i, e_{ik} に対する変分を求めることにより重力場の方程式が求まる．まず λ について変分をとれば

$$K^{ij}K_{ij}-K^2+R=0\,. \tag{62.15a}$$

つぎに λ_k に対する変分からは

$$\partial_i\{\sqrt{e}\,(K^{ik}-e^{ik}K)\}+\Gamma^k{}_{mn}\sqrt{e}\,(K^{mn}-e^{mn}K)=0 \tag{62.15b}$$

となる．e_{ik} に関する変分から求まる方程式は面倒だから省略する．これらはすべて Lagrange 形式にかかれた場の方程式である．

(62.15a)，(62.15b) には時間に関する2階微分は出て来ない．1階微分としては $\partial_0 e_{ik}$ が K_{mn} の中に含まれるだけである．したがって，これらは場の量の時間的経過を規定する式ではなく，§48 に述べたように，束縛条件とみなすべきものである．

さて，e_{ik}, λ_i, λ に正準共役な量をそれぞれ π^{ik}, π^i, および π とする.* (61.16) によれば，これらは次のような式で，$\partial_0 e_{ik}$, $\partial_0\lambda_i$, $\partial_0\lambda$ と結ばれる：

$$\pi^{ik}=\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial(e_{ik,0})}, \qquad \pi^i=\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial(\lambda_{i,0})}, \qquad \pi=\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial(\lambda_{,0})}.$$

この右辺に (62.14) の $\boldsymbol{L}$ を使うと

$$\pi^{ik}=\frac{\sqrt{e}}{2\kappa}(K^{ik}-e^{ik}K), \tag{62.16 a}$$

$$\pi^i=0, \tag{62.16 b}$$

$$\pi=0 \tag{62.16 c}$$

となる．

(62.16a) からは $\partial_0 e_{ik}$ を π^{ik} の関数として解くことができる．

$$\partial_0 e_{ik}=\nabla_i\lambda_k+\nabla_k\lambda_i+\frac{4\kappa}{\sqrt{e}}\lambda\left(\pi_{ik}-\frac{1}{2}e_{ik}e_{mn}\pi^{mn}\right). \tag{62.17}$$

ここで添字の上げ下ろしはすべて e_{ik}, e^{ik} によるものとする．たとえば

$$\pi_{ik}=e_{im}e_{kn}\pi^{mn}$$

である．これに反して $\partial_0\lambda_i$, $\partial_0\lambda$ は π^i や π の関数としてかき表わすことはできない．それだけでなく，(62.16b)，(62.16c) のような不合理な関係式が存在する．これが重力場を正準形式でかき表わそうとする場合の第1の難点である．

そこでこれから (62.16b)，(62.16c) は一応無視して，10組の正準変数 (e_{ik}, π^{ik})，(λ_i, π^i)，(λ, π) を考えよう．これらは Poisson 括弧

* π^{ik}, π^i, π はいずれも変換 (62.12) に対して密度量として振舞う．したがって，太字でかくべきであるが，わずらわしいので，ここではすべて細字を使う．

$$\left.\begin{aligned}[e_{ik}(\vec{x}, x^0), \pi^{lm}(\vec{x}', x^0)] &= \delta_{ik}{}^{lm}\delta(\vec{x}-\vec{x}'),\\ [\lambda_i(\vec{x}, x^0), \pi^k(\vec{x}', x^0)] &= \delta_i{}^k\delta(\vec{x}-\vec{x}'),\\ [\lambda(\vec{x}, x^0), \pi(\vec{x}', x^0)] &= \delta(\vec{x}-\vec{x}')\end{aligned}\right\} \tag{62.18}$$

を満足するものとする．ここで

$$\delta_{ik}{}^{lm} \overset{d}{\equiv} \frac{1}{2}(\delta_i{}^l\delta_k{}^m + \delta_i{}^m\delta_k{}^l).$$

なお，(62.18) にかかれていない変数の組合せに対しては Poisson 括弧は 0 になるものとする．たとえば，

$$[\lambda_i(\vec{x}, x^0), \pi^{lm}(\vec{x}', x^0)] = 0$$

である．

Hamiltonian は (61.17) に従って

$$\overline{H} \overset{d}{\equiv} \int \boldsymbol{H}\, d^3x,$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H} &\overset{d}{\equiv} \pi^{ik}\frac{\partial e_{ik}}{\partial t} + \pi^i\frac{\partial \lambda_i}{\partial t} + \pi\frac{\partial \lambda}{\partial t} - \boldsymbol{L}\\ &= \pi^i\alpha_i + \pi\beta + 2\pi^{ik}\nabla_i\lambda_k + \lambda\mathscr{H} - \frac{1}{2\kappa}\partial_k \boldsymbol{V}^k.\end{aligned} \tag{62.19}$$

ここで

$$\mathscr{H} \overset{d}{\equiv} \frac{2\kappa}{\sqrt{e}}\left\{\pi^{ik}\pi_{ik} - \frac{1}{2}(e_{ik}\pi^{ik})^2\right\} + \frac{1}{2\kappa}\sqrt{e}\,R. \tag{62.20}$$

(62.19) で，$\partial_i\lambda_i$，$\partial_i\lambda$ の代りに α_i，β とおいた．これらはいずれも $\vec{x}$, x^0 の不定の関数であり，また正準変数とどのような関係にあるかも不明の量である．

Poisson 括弧 (62.18) を使うと場の方程式はつぎのような正準形式にかき表わされる：

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = [\lambda, \overline{H}] = \beta + [\lambda, \alpha_i]\pi^i + [\lambda, \beta]\pi, \tag{62.21}$$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial t} = \alpha_i + [\lambda_i, \alpha_k]\pi^k + [\lambda_i, \beta]\pi, \tag{62.22}$$

$$\frac{\partial e_{ik}}{\partial t} = (\nabla_i\lambda_k + \nabla_k\lambda_i) + \frac{4\kappa}{\sqrt{e}}\lambda\left(\pi_{ik} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{mn}\pi^{mn}\right)$$

$$+ [e_{ik}, \alpha_m]\pi^m + [e_{ik}, \beta]\pi, \tag{62.23}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = -\mathscr{H} + [\pi, \alpha_i]\pi^i + [\pi, \beta]\pi, \tag{62.24}$$

$$\frac{\partial \pi^i}{\partial t} = 2\nabla_k \pi^{ki} + [\pi^i, \alpha_k]\pi^k + [\pi^i, \beta]\pi, \tag{62.25}$$

$$\frac{\partial \pi^{ik}}{\partial t} = -\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial e_{ik}} + \partial_l\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial e_{ik,l}}\right). \tag{62.26}$$

ここで

$$\nabla_k \pi^{ki} \overset{d}{\equiv} \partial_k \pi^{ki} + \Gamma^i{}_{kl}\pi^{kl}$$

である．

§63. 束縛条件，Hamiltonian

Poisson 括弧（62.18）を定義するとき，もし（62.16b）（62.16c）をみとめるならば，π^i や π に関する微分を遂行できないから困難を生ずる．前節では（62.16b），（62.16c）を無視して π^i, π はいずれも任意の値をとりうる独立な量と考えて Poisson 括弧を定義した．しかし（62.16b），（62.16c）は，スタートにとった Lagrange 関数 $\boldsymbol{L}$ が $\lambda_{i,0}$ や $\lambda_{,0}$ を含まないという事実を表わしている．$\boldsymbol{L}$ に関するこの重要な制限を無視し続けるならば，正準形式にかかれた理論の内容はもとの Lagrange 形式にかかれた場の方程式のそれと同等でなくなるはずである．そこで（62.16b），（62.16c）を以下のような方法で考慮にいれることにする．

$\pi^i(\vec{x}, t)$, $\pi(\vec{x}, t)$ はいずれも独立な物理量で，その値は必ずしも 0 とは限らない．しかしもとの Lagrange 形式にかき表わされた物理系は，正準形式にかかれたもののうち特に $\pi = 0$, $\pi^i = 0$ という特別な値をとる場合に相当すると考える．すなわち（62.16b），（62.16c）は，物理系を拘束する**束縛条件**であると解釈することにする．つまり（62.16b），（62.16c）という条件を無視した，自由度の大きい系に対してまず Poisson 括弧を定義しておく．それに（62.16b），（62.16c）という束縛条件をつけたものが，現実の重力場を表わすという解釈である．今後は束縛条件を使ったときにはじめて成立する関係式を

弱い等式，条件を使わなくとも成立する関係式を**強い等式**と呼ぶことにする．$A=B$ は強い等式を示し，$A\approx B$ は弱い等式を表わすことにする．

Poisson 括弧 (62.18) や正準方程式 (62.21)～(62.26) はすべて強い等式である．これに対して

$$\pi^i\approx 0, \qquad \pi\approx 0 \tag{63.1}$$

は ≈ の示すとおり弱い等式である．

さて，束縛条件を正準理論ではどのように扱えばよいかを考えてみよう．いま，$A(\vec{x},t)$ は任意の値をとりうる物理量とする．それが $A(\vec{x},t)\approx 0$ という束縛条件を満たさねばならないとしよう．それには $t=0$ という超曲面 S の上のすべての点で A 自身が0であるばかりでなく

$$\left(\frac{\partial^n}{\partial t^n}A(\vec{x},t)\right)_{t=0}=0 \qquad (n=1,2,\cdots)$$

も成立すればよい．このような初期条件をつければ任意の $\vec{x}$, t に対して，$A(\vec{x},t)\approx 0$ が成立する．このことは A を t について，$t=0$ を中心としてべき展開してみればすぐに理解できる．したがって束縛条件 $A(\vec{x},t)\approx 0$ は，上のような無限個の初期条件におきかえることができる．ところで，上にかいた t に関する微分は正準方程式を利用すれば，$\bar{H}$ との Poisson 括弧を計算することにより求まる．したがってその結果はすべて時間微分を含まない，$t=0$ における正準変数の間の条件式となる．

なお，以上の説明からわかるように，今後は ≈ 0 はすべて初期条件におきかえられたのであるから，Poisson 括弧を計算したり，正準方程式を導く途中の段階で弱い関係式を用いてはならない．それは正準方程式の解を求めるときにはじめて使用が許される．

(63.1) を使うと，$t=0$ には正準方程式は以下のような弱い式にかきかえられる：

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}\approx\beta, \qquad \frac{\partial\lambda_i}{\partial t}\approx\alpha_i, \tag{63.2}$$

$$\frac{\partial e_{ik}}{\partial t}\approx(\nabla_i\lambda_k+\nabla_k\lambda_i)+\frac{4\kappa}{\sqrt{e}}\lambda\left(\pi_{ik}-\frac{1}{2}e_{ik}e_{mn}\pi^{mn}\right), \tag{63.3}$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial t} \approx -\mathscr{H}, \tag{63.4}$$

$$\frac{\partial\pi^i}{\partial t} \approx 2\nabla_k\pi^{ki}. \tag{63.5}$$

Hamiltonian を作る際に不定関数 $\lambda_{,0}$, $\lambda_{i,0}$ をそれぞれ β, α_i とおいたが，それが正準方程式の一部として導かれることを示しているものが (63.2) である．(63.3) は (62.17) にほかならない．これも弱い等式の形で再現される．

さて，上に述べたように，曲面 S の上では $\pi \approx 0$, $\pi^i \approx 0$ であるばかりでなく，その時間に関する 1 階微分も 0 とならねばならない．そこで，さらに初期条件

$$\frac{\partial\pi}{\partial t} \approx 0, \qquad \frac{\partial\pi^i}{\partial t} \approx 0 \tag{63.6}$$

もつけ加える必要がある．(63.4)，(63.5) を使うと，(63.6) は

$$\mathscr{H} \approx 0, \tag{63.4$'$}$$

$$\nabla_k\pi^{ki} \overset{d}{\equiv} \partial_k\pi^{ki} + \Gamma^i{}_{mn}\pi^{mn} \approx 0 \tag{63.5$'$}$$

となる．

(63.4)$'$, (63.5)$'$ はそれぞれ Lagrange 形式にかかれた (62.15 a), (62.15 b) と同じものである．後者の K_{mn} を (62.16 a) または (62.17) を用いて π_{mn} でかき表わせば，(63.4)$'$, (63.5)$'$ が導かれる．既に (62.15 a), (62.15 b) を求めたときに，これらはいずれも束縛条件と解釈すべきであると述べたが，これがいま再び形をかえて登場したわけである．

(63.1), (63.4)$'$, (63.5)$'$ を使うと，Hamiltonian (62.19) は

$$\overline{H} \approx 2\int\partial_i(\pi^{ik}\lambda_k)d^3x - \frac{1}{2\kappa}\int\partial_k V^k d^3x \tag{63.7}$$

となる．

さて，これから時空は無限遠まで広がっているものとする．また，無限遠では時空は平坦になるものとする．そこで，座標系を適当に選べば，$r\to\infty$ に対して

$$g_{00} \to -1 + \frac{a}{r}, \qquad g_{0i} \to 0 \quad \Bigg\}$$

$$g_{ik} \rightarrow \delta_{ik} + \frac{bx^i x^k}{r^3}, \qquad (r = \sqrt{\delta_{ik} x^i x^k}) \tag{63.8}$$

とすることが必ずできる．このような座標系では，十分に大きな r に対して

$$\pi^{ik} \rightarrow 0, \qquad \lambda \rightarrow 1 - \frac{a}{2r},$$

$$\lambda_i \rightarrow 0.$$

したがって（63.7）の第1項は無視できることになり

$$\bar{H} \approx -\frac{1}{2\kappa}\int V^k d\sigma_k$$

となる．

一方，このような場合には，$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ とおくと，（29.9）により全エネルギー（重力場だけでなく，物質が存在しても）は

$$\bar{H} = J_0 = \frac{1}{2\kappa}\int (h_{kl,l} - h_{ll,k}) d\sigma_k \tag{63.9}$$

となる．

さて，§29で述べたように重力場のエネルギーについて有意義な議論をするためには，（63.8）のような漸近的 Lorentz 系を採用しなければならない．したがって，（62.12）のような座標変換を考える場合にも，座標系のこの漸近的性格を保持するような変換に限る必要がある．つまり r を十分に大きくすれば，座標変換は漸近的に Lorentz 変換となるものに限られる．ところで，$\boldsymbol{V}^k$ を決定するにあたり，既に述べたように，（62.14）の最後の項は座標変換（62.12）に対して不変でなければならない．しかしこの項は実は r の十分大きな点における $\boldsymbol{V}^k$ の値だけに依存し，r が有限の値をもつ点における $\boldsymbol{V}^k$ の値や振舞はどうでもよい．一方，この追加項の値が座標変換に対して不変なためには，$\boldsymbol{V}^k$ は反変ベクトル密度であればよい．しかしこの条件はただ無限遠点における $\boldsymbol{V}^k$ に対する条件である．つまり，無限遠点において $\boldsymbol{V}^k$ が Lorentz 変換に対して反変ベクトル密度として振舞えば十分である．r が有限の値をもつ点における $\boldsymbol{V}^k$ が，一般座標変換（62.12）に対してベクトル密度として振舞うか否かはどうでもよい．これは見おとしてはならない点である．

以上の考察から，$\boldsymbol{V}^k$ を

$$-V^k=\sqrt{e}\ \{e^{mn}\Gamma^k{}_{mn}-e^{ki}\Gamma^m{}_{im}\} \tag{63.10}$$

とすればよいことがわかる．これは (63.9) の $h_{kl,l}$ 等を Γ でかき表わすことにより求まる．

そこで Hamiltonian の被積分関数は

$$\boldsymbol{H}=\pi^i\alpha_i+\pi\beta-2\lambda_k\nabla_i\pi^{ik}+(\lambda-1)\mathscr{H}+2\partial_i(\lambda_k\pi^{ik})$$
$$+\mathscr{H}+\frac{1}{2\kappa}\partial_k\{(\Gamma^k{}_{mn}e^{mn}-e^{ki}\Gamma^m{}_{im})\sqrt{e}\ \}$$

となる．この最後から3つ目の項は表面積分にかきかえられる．漸近的 Lorentz 系では，$\lambda_k\pi^{ik}=O(r^{-3})$ となるから，この積分は不要となる．

つぎに最後の2つの項の和を，Dirac* に従って，$\mathscr{H}_{\mathrm{main}}$ とかくことにする．これは，R の中にある e_{ik} の2階微係数をかきかえることにより，つぎのように変形される：

$$\mathscr{H}_{\mathrm{main}}\overset{d}{\equiv}\mathscr{H}+\frac{1}{2\kappa}\partial_k\{\sqrt{e}\ (\Gamma^k{}_{mn}e^{mn}-e^{ki}\Gamma^m{}_{im})\}$$
$$=\frac{2\kappa}{\sqrt{e}}\left\{\pi^{ik}\pi_{ik}-\frac{1}{2}(e_{ik}\pi^{ik})^2\right\}$$
$$+\frac{1}{2\kappa}\sqrt{e}\ e^{ik}(\Gamma^l{}_{ik}\Gamma^m{}_{lm}-\Gamma^l{}_{im}\Gamma^m{}_{kl}). \tag{63.11}$$

これは e_{ik} の1階微係数および π^{ik} の2次同次式になっている．この意味で $\mathscr{H}_{\mathrm{main}}$ はわれわれの好みのタイプといえる．結局，$\bar{H}$ は

$$\bar{H}=\int\boldsymbol{H}'\,d^3x, \tag{63.12}$$

$$\boldsymbol{H}'\overset{d}{\equiv}\mathscr{H}_{\mathrm{main}}+\pi^i\alpha_i+\pi\beta+(\lambda-1)\mathscr{H}-2\lambda_k\nabla_i\pi^{ik} \tag{63.13}$$

となる．これに束縛条件を使うと

$$\bar{H}\approx\int\mathscr{H}_{\mathrm{main}}\,d^3x \tag{63.13$'$}$$

となる．

以上は初期条件 (63.1)，(63.6) から導かれる結果である．ここでさらに

---

* P. A. M. Dirac: Proc. Roy. Soc. A, **246** (1958) 326 および 333, Phys. Rev. **114** (1959) 924.

(63.1) の t に関する高階微分も 0 となるべしという初期条件をつぎからつぎと追加しなければならないように思われる．はじめに述べた一般的考察によればまさにそのとおりである．ところが重力場の場合には幸いなことに1階微分に対する初期条件 (63.6) まで十分であることがわかる．これは Bianchi の恒等式のおかげである．

いま，Bianchi の恒等式を，ここに用いている変数 λ, λ_i, e_{ik} を用いてかいてみよう．それには

$$I = -\frac{1}{2\kappa}\int {}^{(4)}\boldsymbol{R}\, d^4x$$

が無限小変換

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} = x^\mu + \xi^\mu(x) \tag{63.14}$$

に対して不変という事実を用いて，(28.28) を導いたと同じ方法で恒等式を導けばよい．(63.14) に応じて e_{ik} 等は

$$\begin{aligned}
\delta\lambda &\overset{d}{\equiv} \lambda'(x') - \lambda(x) = -\xi^0{}_{,0}\lambda + \xi^0{}_{,k}\lambda^k\lambda, \\
\delta\lambda_k &= -\xi^0{}_{,0}\lambda_k - \xi^i{}_{,0}e_{ik} - \xi^i{}_{,k}\lambda_i - \xi^0{}_{,k}(\lambda^l\lambda_l - \lambda^2), \\
\delta e_{ik} &= -\xi^0{}_{,i}\lambda_k - \xi^0{}_{,k}\lambda_i - \xi^l{}_{,i}e_{lk} - \xi^l{}_{,k}e_{li}
\end{aligned}$$

という変換をこうむる．これを用いて $\delta I \equiv 0$ をかき直すと，Bianchi の恒等式に相当するものが次の形で求まる：

$$\begin{aligned}
\lambda\partial_0(\mathscr{H}) - 2\lambda_k\partial_0(\nabla_i\pi^{ik}) &\equiv (\lambda\lambda^k\mathscr{H})_{,k} + 2\{(\lambda^l\lambda_l - \lambda^2)\nabla_m\pi^{mk}\}_{,k} \\
&\quad + \frac{1}{\kappa}(\boldsymbol{G}^{ik}\lambda_k)_{,i} - \frac{1}{2\kappa}\boldsymbol{G}^{ik}e_{ik,0}, \\
-2\partial_0(e_{lk}\nabla_m\pi^{km}) &\equiv \lambda_{,l}\mathscr{H} + 2(\lambda_l\nabla_m\pi^{mk})_{,k} - 2\lambda_{k,l}\nabla_m\pi^{km} \\
&\quad + \frac{1}{\kappa}(\boldsymbol{G}^{ik}e_{kl})_{,i} - \frac{1}{2\kappa}\boldsymbol{G}^{ik}e_{ik,l}.
\end{aligned} \tag{63.15}$$

上の恒等式を求めるとき，もともとは K_{ik} がでてくるが，これをすべて (62.16a) や (62.17) を使って正準変数 π^{ik} にかき直した．なお，(63.15) を求めるのに，

$$\frac{\delta I}{\delta\lambda} = -\mathscr{H}, \qquad \frac{\delta I}{\delta\lambda_i} = 2\nabla_k\pi^{ki},$$

$$\frac{\delta I}{\delta e_{ik}} = \frac{1}{2\kappa} G^{ik} = \frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}\left({}^{(4)}R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik\,(4)}R\right)$$

という関係を使った．

いま，S の上のすべての点で束縛条件（63.1），（63.6）が成立すること，および場の方程式 $G^{ik} \approx 0$ が成立することを使うと，*（63.15）から

$$\partial_0 \mathcal{H} \approx 0, \qquad \partial_0(\nabla_m \pi^{km}) \approx 0 \tag{63.16}$$

も S の上のすべての点で成立する．（63.15）の両辺を x^0 で微分したのちに，それに（63.1），（63.6），（63.16）を代入すると，$\mathcal{H}$ および $\nabla_m \pi^{km}$ の x^0 に関する 2 階微分も ≈ 0 となる．この手順をくり返せば，何階微分でもすべて ≈ 0 となる．したがって，S 上のすべての点で（63.1），（63.6）が成立すべしという条件さえ満たされれば，t に関するそれ以上の微分の 0 となることは要求しなくてもよい．

結局 20 個の正準変数（λ, λ_i, e_{ik}, π, π^i, π^{ik}）に対して 20 個の方程式が用意されたことになる．そのうちわけは，（63.2），（63.3）が 10 個，（63.4）′，（63.5）′ が 4 個，最後に真の場の方程式

$$\frac{\partial \pi^{ik}}{\partial t} = [\pi^{ik}, \overline{H}] = -\frac{\delta \overline{H}}{\delta e_{ik}} \tag{63.17}$$

が 6 個である．これらの解を求めるにあたり，S の上の初期値 e_{ik}, π^{ik} は（63.6）を満たすように与えねばならない．また π, π^i は 0 とおかねばならない．λ, λ_i は（63.2）が示すように，その未来の値は全く不定である．したがって $\lambda = 1$, $\lambda_i = 0$ としてもよい．あるいは座標変換により任意の値をとらせることも可能である．e_{ik} と π^{ik} の時間的発展は方程式（63.3）と（63.17）によりきまる．これらの式の中には上述の不定関数 λ, λ_i が含まれている．したがって，解は常に λ, λ_i のとり方に依存する．なお $\lambda = 1$, $\lambda_k = 0$ としたときは $\partial_0 \lambda = \beta = 0$, $\partial_0 \lambda_i = \alpha_i = 0$ となるから，（63.13）から $\overline{H}$ は

$$\overline{H} = \int \mathcal{H}_{\text{main}}\, d^3x$$

* Lagrange 形式の $G^{ik} = 0$ を正準理論から導こうとすれば，束縛条件（63.1）を使わねばならない．したがって，正準理論では $G^{ik} \approx 0$ とかくべきである．

となる．

§ 64．束縛条件の間の無矛盾性

重力場の正準理論では8個の束縛条件

$$\pi(\vec{x}, t=0) \approx 0, \tag{64.1}$$

$$\pi^k(\vec{x}, t=0) \approx 0, \tag{64.2}$$

$$\chi^k(\vec{x}, t=0) \overset{d}{\equiv} -2\nabla_i \pi^{ik}(\vec{x}, t=0) \approx 0, \tag{64.3}$$

$$\mathscr{H}(\vec{x}, t=0) \approx 0 \tag{64.4}$$

がある．* これらは $t=0$ という超曲面上のすべての点 $\vec{x}$ において成立していなければならない．そのようなことが実際に可能か否かを調べてみよう．これらの条件が互いに併立しうるためには，これらの左辺の量の任意の組合せからできる Poisson 括弧も ≈ 0 となればよい．これは理論を量子化する際に是非とも満たさねばならない条件である．

まず，(64.1)，(64.2) はそれぞれ自分自身に対して

$$[\pi(\vec{x}, 0), \pi(\vec{x}', 0)] = 0, \qquad [\pi^k(\vec{x}, 0), \pi^l(\vec{x}', 0)] = 0$$

が成立するばかりでなく，(64.1)～(64.4) のいずれと組合せても Poisson 括弧は $=0$ となる．そこで，残る問題は (64.3)，(64.4) の間の括弧がどうなるかという点である．

それには少し話が回り道になるがつぎのような無限小座標変換を考えよう：

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= \text{不変}, \\ x^k \to x^{k'} &= x^k + \xi^k(x^1, x^2, x^3). \end{aligned}\right\} \tag{64.5}$$

ξ^k は無限小量とし，$r \to \infty$ ではすばやく0になるものとする．これに応じて e_{ik} 等はつぎのように変化する**：

$$\left.\begin{aligned} \bar{\delta} e_{ik} &\overset{d}{\equiv} e_{ik}'(x) - e_{ik}(x) = -\xi^m{}_{,i} e_{mk} - \xi^m{}_{,k} e_{mi} - e_{ik,m}\xi^m, \\ \bar{\delta}\lambda_k &= -\xi^m{}_{,k}\lambda_m - \lambda_{k,m}\xi^m, \\ \delta\lambda &= -\lambda_{,m}\xi^m. \end{aligned}\right\} \tag{64.5$'$}$$

---

* $\mathscr{H}$ の定義は (62.20) であたえられている．

** $\bar{\delta}$ の定義については (25.1)$'$ を参照．

これに対して

$$I \overset{d}{\equiv} \int \frac{1}{2\kappa}\lambda\sqrt{e}(K^{ij}K_{ij} - K^2 - R)d^4x \qquad (62.11)$$

は不変である．ここで R の中の $\partial_i \Gamma^m{}_{kn}$ のような項を部分積分によりかき直すと

$$I = \int (\boldsymbol{L}' + \partial_i \boldsymbol{D}^i)d^4x \qquad (64.6)$$

となる．ここで

$$\boldsymbol{L}' \overset{d}{\equiv} \frac{1}{2\kappa}\lambda\sqrt{e}\{K^{ij}K_{ij} - K^2 + e^{ij}(\Gamma^m{}_{in}\Gamma^n{}_{jm} - \Gamma^m{}_{ij}\Gamma^n{}_{nm})\}$$

$$+ \frac{1}{2\kappa}\sqrt{e}\,\partial_i\lambda(e^{ij}\Gamma^k{}_{jk} - e^{mn}\Gamma^i{}_{mn}), \qquad (64.7)$$

$$\boldsymbol{D}^i \overset{d}{\equiv} -\frac{1}{2\kappa}\lambda\sqrt{e}(e^{ij}\Gamma^m{}_{mj} - e^{mn}\Gamma^i{}_{mn}).$$

これに Noether の第 2 定理を応用すると，(27.5) にならって

$$\partial_0\{\pi^k\delta\lambda_k + \pi^{ik}\delta e_{ik} - \xi^m(\pi\lambda_{,m} + \pi^k\lambda_{k,m} + \pi^{ik}e_{ik,m})\}$$
$$+ \partial_i\left\{\frac{\partial \boldsymbol{L}'}{\partial\lambda_{k,i}}\delta\lambda_k + \cdots\right\} \equiv 0.$$

これを 3 次元全空間にわたり積分すると，この第 2 項は表面積分に変わる．しかし $r \to \infty$ で ξ^m がすばやく 0 となるから，この積分は 0 となる．そこで第 1 項の { } を積分した

$$J \overset{d}{\equiv} \int \{\pi^k\delta\lambda_k + \pi^{ik}\delta e_{ik} - \xi^m(\cdots)\}d^3x$$

は t に無関係な定数となる．これに (64.5)$'$ を代入して少々かきかえると

$$J = \int \xi^l[\lambda_l\partial_k\pi^k + \pi^k(\lambda_{l,k} - \lambda_{k,l}) - \pi\lambda_{,l} + 2e_{lk}\nabla_i\pi^{ik}]d^3x \qquad (64.8)$$

となる．π がすべて密度量であることを考えるとき，J が座標変換 (64.5) に対して不変であることは一目でわかるであろう．

さて，この J が変換 (64.5)$'$ の母関数であることをこれから証明しよう．すなわち任意の正準変数 $Q(x)$ に対して (64.5) に応じた Q の変化を $\bar{\delta}Q \overset{d}{\equiv} Q'(x) - Q(x)$ とおくとき

$$\bar{\delta}Q = [Q,\ J] \tag{64.9}$$

となることを証明しよう．

例として Q の代りに e_{ik} とおけば，(64.9) の右辺は

$$[e_{ik}(x),\ J] = -\,\partial_i(e_{kl}\xi^l) - \partial_k(e_{il}\xi^l) + 2\xi^m e_{mn}\Gamma^n{}_{ik}\,.$$

この右辺は確かに (64.5)′ に与えられた $\bar{\delta}e_{ik}$ になっている．

もうひとつの例として $Q=\pi^{mn}$ としてみよう．π^{mn} は反変ベクトル密度であるから，ξ の1次までの近似では

$$\pi^{mn\prime}(x') = \frac{\partial(x)}{\partial(x')}\frac{\partial x^{m\prime}}{\partial x^k}\frac{\partial x^{n\prime}}{\partial x^l}\pi^{kl}$$
$$= \pi^{mn} + \xi^m{}_{,k}\pi^{kn} + \xi^n{}_{,k}\pi^{km} - \xi^k{}_{,k}\pi^{mn}$$

のように変換される．そこで

$$\bar{\delta}\pi^{mn} = \xi^m{}_{,k}\pi^{kn} + \xi^n{}_{,k}\pi^{km} - \xi^k{}_{,k}\pi^{mn} - \pi^{mn}{}_{,k}\xi^k \tag{64.10}$$

となる．

一方，(64.9) の右辺は

$$[\pi^{mn},\ J] = -\,\xi^m\partial_i\pi^{in} - \xi^n\partial_i\pi^{im} + (\xi^m\pi^{ni})_{,i} + (\xi^n\pi^{mi})_{,i} - (\xi^l\pi^{mn})_{,l}\,.$$

この右辺を整理すると (64.10) に一致することがわかる．

さて，(64.8) を

$$J = \int \xi^l(\vec{x})\boldsymbol{G}_l(\vec{x},\ t)d^3x,$$
$$\boldsymbol{G}_l \overset{d}{\equiv} \lambda_l\partial_k\pi^k + \pi^k(\lambda_{l,k} - \lambda_{k,l}) - \pi\lambda_{,l} - e_{lk}\chi^k \tag{64.11}$$

とおけば，$\boldsymbol{G}_l$ を変換 (64.5)′ の生成演算子とよぶことができよう．変換 (64.5)［あるいは (64.5)′］はひとつの連続群を構成する．この群の生成元が (64.11) にあたえた $\boldsymbol{G}_l(\vec{x},\ t)$ である．したがって，これは Lie の基本関係

$$[\boldsymbol{G}_m(\vec{x},\ t),\ \boldsymbol{G}_n(\vec{x}',\ t)] = \int C^k{}_{mn}(\vec{x}'';\ \vec{x},\ \vec{x}')\boldsymbol{G}_k(\vec{x}'',\ t)d^3x'' \tag{64.12}$$

を満たすはずである．これは変換 (64.5) が連続群をなすという事実からの必然的結果である．

(64.12) の左辺には (64.1)〜(64.3) の間の種々の組合せによる Poisson 括

弧がでてくる．しかしそれらの和は（64.12）によれば，（64.1)~(64.3）の1次式で表わされる．そこで束縛条件（64.1)~(64.3）を使えば右辺は ≈ 0 となる．つまり，（64.1)~(64.3）のあらゆる組合せに対する Poisson 括弧はすべて ≈ 0 となる．

束縛条件（64.4）と他の条件との組合せも ≈ 0 となることを証明するには

$$x^0 \to x^{0\prime} \equiv x^0 + \xi^0(x),$$
$$x^k = \text{不変}$$

という変換に対する作用積分の不変性を利用する必要がある．しかし計算が大変面倒なので，詳細をここにかくことはやめて，結果だけをつぎにまとめて示そう．

$$\left.\begin{aligned}
[\chi_i(\vec{x}, t), \chi_j(\vec{x}', t)] &= -\chi_i(x')\frac{\partial}{\partial x^{j\prime}}\delta(\vec{x}-\vec{x}') + \chi_j(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\delta(\vec{x}-\vec{x}'),\\
[\chi_i(\vec{x}, t), \mathscr{H}(\vec{x}', t)] &= \mathscr{H}(\vec{x}, t)\frac{\partial}{\partial x^i}\delta(\vec{x}-\vec{x}'),\\
[\mathscr{H}(\vec{x}, t), \mathscr{H}(\vec{x}', t)] &= 2\chi^k(x)\frac{\partial}{\partial x^k}\delta(\vec{x}-\vec{x}') + \partial_k\chi^k(x)\delta(\vec{x}-\vec{x}').
\end{aligned}\right\} \tag{64.13}$$

以上に述べたことを一言でいえば，条件（64.1)~(64.4）が互いに併立しうることは理論全体が一般座標変換に対して不変であるという性質にもとづいているということである．

これで重力場の理論を正準形式にかくことは完了した．

§65. 座標条件

§63で述べたように，正準形式にかかれた場の方程式は

$$\partial_0 e_{ik} = [e_{ik}, \overline{H}], \qquad \partial_0 \pi^{ik} = [\pi^{ik}, \overline{H}] \tag{65.1}$$

である．これを解くのに必要な，$t=0$ における e_{ik}, π^{ik} の初期値は

$$Y_0 \overset{d}{\equiv} \mathscr{H} \approx 0, \qquad Y_k \overset{d}{\equiv} \chi_k \approx 0 \qquad (k=1, 2, 3) \tag{65.2}$$

という4個の条件を満たす必要がある．しかしこれらの条件式は，時間微分こそ含まないが，それは4個の連立偏微分方程式である．したがって12個の e_{ik},

π_{ik} の中で8個までは勝手に与えることができるとしても，残り4個の初期値は（65.2）の解となる必要がある．それゆえ普通の初期値問題とは異なり，初期値を与えるためにまず微分方程式を解かねばならない．このような厄介なことがなぜ起きたか，これをうまい具合に回避することはできないかについて考えてみよう．

このような問題は実は電磁場のときにも存在した．電磁場の方程式はいわゆる Gauge 変換に対して不変である．電磁場の4元ポテンシャルを A_μ とし，これに正準共役な量を p^μ とするとき，(63.1）に対応して

$$p^0 \approx 0 \tag{65.3}$$

となる．また (63.4)，(63.5）に対応して

$$\frac{dp^0}{dt} \approx 0, \qquad \text{あるいは} \qquad Y \overset{d}{\equiv} \partial_k p^k \approx 0 \tag{65.4}$$

となる．(65.4）はまさに重力場の（65.2）に該当する．ところで $=0$ としないで ≈ 0 としたのは，任意の物理量（正準変数のひとつ）を代表的に X とするとき

$$[X,\ p^0] \doteqdot 0, \qquad \text{あるいは} \qquad [X,\ \partial_k p^k] \doteqdot 0$$

となるような X が存在するからである．もしそのような X が存在しなければ $\approx$ を $=$ におきかえることができる．いま $A_0=0$（とすることは Gauge 変換により可能である）とおけば，もはや $[p^0,\ X] \doteqdot 0$ となるような X はでてこない．したがって $p^0=0$ とすることができる．このようにしたときは A_0, p^0 は正準変数の仲間からはずされたことになる．しかし残りの6個，$(A_k,\ p^k)$ もすべてが互いに独立な量とはいえない．事実（65.4）は p_k の間の1個の関係をあたえるものである．したがって独立な p_k は2個しかない．そこでこれに対応して A_k の自由度も1個減らす必要がある．

いま，$[Z,\ \partial_k p^k] \doteqdot 0$ となるような Z を理論から消去すれば，残る物理量はすべて $\partial_k p^k$ との Poisson 括弧が $=0$ となる．したがってそのときは（65.4）を $=0$ におきかえてよい．このようにするには，都合の悪い量 Z を $Z=0$ として理論から追放すればよい．$Z=0$ と $Y \overset{d}{\equiv} \partial_k p^k = 0$ により，2個の物理量

が理論から姿を消し，残るは4個となる． これは $\vec{A}$ の中の2個の成分（たとえば，横成分）とそれに共役な $\vec{p}$ の中の2個の成分に該当する．

ところで，(65.3)，(65.4) はGauge変換の母関数である．一般に任意の A とこれらの母関数との Poisson 括弧は Gauge 変換による A の変化量を与える．A が Gauge 不変量のときは，A と (65.3)，(65.4) との Poisson 括弧は $=0$ となる．

そこで，上に述べたような Z は Gauge 変換に対して不変ではないことが必要である．したがって，$Z=0$ という式は Gauge 不変ではない関係式である．この関係式はある特別な Gauge を採用することを意味する． このような関係式を **Gauge 条件**（Gauge を固定する条件）という．

話を重力場にもどして，まず $Y_\mu\,(\mu=0,\cdots,3)$ の役割を調べてみよう．既に §64 でも述べたように，これらは座標変換の母関数の一部である．いま，任意の超曲面（$t=$一定）上の1点Pにある任意の物理量を $\Phi(x)$ とする．いまPにおける，曲面の法線方向の変形に対する Φ の変化を $\partial\Phi/\partial n$ とすれば，

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=n^\mu(x)\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x^\mu} \tag{65.5}$$

である． $n^\mu(x)$ はPにおける大きさ1の法線ベクトルである（未来向きとする）．

超曲面の方程式は $x^0=\mathrm{const}$ であるから

$$n_\mu(x)=-\frac{\delta^0{}_\mu}{\sqrt{-g^{00}(x)}},$$

あるいは未来向きの n^μ は

$$n^\mu(x)=g^{\mu\nu}n_\nu=-\frac{g^{\mu0}}{\sqrt{-g^{00}}}$$

である．確かに $n_\mu n^\mu=-1$ である．これを使うと，(65.5) から

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^0}=\frac{1}{\sqrt{-g^{00}}}\frac{\partial\Phi}{\partial n}+\frac{g^{k0}}{(-g^{00})}\frac{\partial\Phi}{\partial x^k},$$

あるいは (62.5) を使うと

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^0}=\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial n}+e^{ki}\lambda_i\frac{\partial\Phi}{\partial x^k}. \tag{65.5$'$}$$

ここで Φ は e_{ik}, π^{ik} だけの関数とし，λ, λ_k, π, π^k には無関係とする．正準方程式を使うと，(65.5)′ の左辺は

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^0} = [\Phi,\ \bar{H}] = \int(\lambda[\Phi,\ \mathscr{H}] + \lambda_k[\Phi,\ \chi^k])d^3x$$

となる．ここで $\bar{H}$ としては (62.19) を用いた．これと (65.5)′ の右辺を比べると $\mathscr{H}$ は曲面の法線方向への変形の母関数であり，χ^k は曲面内で x^k 方向への移動の母関数に該当することがわかる．

さて，電磁場をお手本にするならば，$Y_\mu \approx 0$ を $=0$ におきかえるためには，4個の量 Z_ν を考え，おのおのの Z に対して

$$[Z_\nu,\ Y_\mu] \neq 0 \tag{65.6}$$

となる Y が少くとも1個は存在するように Z_ν を選ぶ．また逆に，どの Y_μ についても，(65.6) を満たす Z_ν が少くとも1個は存在するものとする．このような Z を理論から追放し，残る変数（これを代表的に Φ_α とかこう）がすべて $[\Phi_\alpha,\ Y_\mu]=0$ を満足するようにさせるのには

$$Z_\nu = 0 \tag{65.7}$$

とおけばよい．こうすれば同時に

$$Y_\mu = 0 \tag{65.8}$$

とおくことも許される．Z も Y も12個の量 e_{ik}, π^{ik} の関数である．(65.7), (65.8) はこれら12個の量の間に8個の関係が存在することを示す．したがって真に独立な物理量は e_{ik} の中の適当な2個と，それに共役な π^{ik} の中の2個である．これら4個の量が上に述べた $\Phi_\alpha(\alpha=1,2,3,4)$ である．Φ_α だけを扱っている限り (65.2) を (65.8) におきかえることは許されることになる．

ところで上に説明した Y_μ の母関数という性格を考えるとき，(65.6) は Z が座標変換に対して不変でないことを示す．つまり，関係式 (65.7) は特別な座標系においてのみ成立するものである．そこでこの関係式を**座標条件**と呼ぶ．

さて，われわれは ≈ 0 という初期条件の代りに (65.7), (65.8) という強い等式を設けた．これらは上述のように4個の独立な量 Φ_α と，他の8個の変

数との関係をあたえる．しかしここで考えを変えて (65.7)，(65.8) をいずれも従来どおり ≈ 0 として扱うことはできないかどうかを考えてみよう．答は不可である．

まず，新しく設けた (65.7) を $Z_\nu \approx 0$ におきかえたとすると，この条件がいかなる時刻にも成立するためには Z_ν と $\bar{H}$ との Poisson 括弧も ≈ 0 とならねばならない．さらにそれと $\bar{H}$ との括弧も ≈ 0 といった具合につぎつぎと新しい条件を追加しなければならない．しかもこのような手順が有限回で矛盾なく終息するとはかぎらない．一方，Z と Y の間の括弧 (65.6) は $\not\approx 0$ でなければならない．これは $Z \approx 0$ と $Y \approx 0$ とが両立できないことを意味する．このことは量子論に移行すれば，一目瞭然となる．それゆえ (65.7)，(65.8) のように $=0$ とする必要がある．

さて，電磁場や重力場の線形近似論では，関係式，$Z=0$，$Y=0$ を解いて余計な変数をすべて真に独立な場の量 Φ の関数としてかき表わすことは容易である．しかし近似を用いない重力場の理論ではこれも決して容易なことではない．そこでさらに話を一歩進めて，できるだけ扱いやすい形になるように工夫をしてみよう．

§66. Poisson 括弧の修正

前節では 4 個の新しい関係式

$$Z_\mu = 0 \tag{66.1}$$

を設け，これと，元来は弱い関係式であった (65.2) を強い関係式におきかえた

$$Y_\mu = 0 \tag{65.8}$$

とから，8 個の物理量を消去すればよいという結論に達した．

しかしこれは簡単にできることではない．そこでそのようなことをする代りに Poisson 括弧を適当に修正し，上のような消去を実行したのと同じ結果になるように工夫しよう．

話の筋を簡単にするために質点系を考えよう．質点の位置座標を $q_1 \cdots q_N$，それに正準共役な量を $p^1 \cdots p^N$ とする．いま，$M(<N)$ 個の束縛条件

$$Y_a(q,\ p)\approx 0 \qquad (a=1,\ \cdots,\ M)$$

が存在し，これらは

$$[Y_a,\ Y_b]\approx 0 \qquad (a,\ b=1,\cdots,\ M) \tag{66.2}$$

とする．そこで (66.1) に対応して，別に M 個の関係式

$$Z_a(q,\ p)=0 \qquad (a=1,\ \cdots,\ M) \tag{66.3}$$

を設けたとする．各 Z_a (および各 Y_b) に対しては

$$[Z_a,\ Y_b]\not\approx 0 \tag{66.4}$$

という Y_b (および Z_a) が必ず少くとも1個はあるとする．

ここで，議論をさらに簡単にするために，正準変換

$$(q,\ p)\rightarrow(Q,\ P)$$

を行う．新旧の変数の関係は

$$P_a \overset{d}{\equiv} Y_a(q,\ p) \qquad (a=1,\ \cdots,\ M) \tag{66.5}$$

とする．残りの $N-M$ 個の P_r はどのように選んでもよい．新変数の Poisson 括弧はもちろん

$$[Q_i,\ P_k]=\delta_{ik}, \qquad [Q_i,\ Q_k]=0,$$

$$[P_i,\ P_k]=0 \qquad (i,\ k=1,\ \cdots,\ N)$$

である．これが (66.5) と矛盾しないことは (66.2) という性質にもとづく．これらの新しい変数を使えば，$Y_a\approx 0$ を $=0$ におきかえた関係式は

$$\left.\begin{aligned} Y_a &\overset{d}{\equiv} P_a=0, \\ \text{また (66.3) は}\quad & \\ Z_a(q,\ p) &\overset{d}{\equiv} F_a(Q,\ P)=0 \end{aligned}\right\} \tag{66.6}$$

となる．a は $1,\ \cdots,\ M$ である．F_a は一般には $P_1,\ \cdots,\ P_M$ にも依存してもよいが，$P_a\approx 0\,(a=1,\ \cdots,\ M)$ のために

$$Z_a \overset{d}{\equiv} F_a(Q_1,\ \cdots,\ Q_N,\ P_{M+1},\ \cdots,\ P_N)=0 \qquad (a=1,\ \cdots,\ M) \tag{66.7}$$

としてかまわない．しかし (66.4) のために各 F_a は $Q_1,\ \cdots,\ Q_M$ のなかのいずれかを必ず少くとも1個は含んでいるはずである．また M 個の F_a は $Q_1,$

$\cdots$, Q_M の関数として関数的に独立でなければこまる．したがって $\partial F_a/\partial Q_b$ を行列要素とする M 次の関数行列式は 0 でなく， 逆行列をもつ．ここでラテン字のアルファベットのはじめの部分， すなわち $a, b, c, \cdots$ は $1, 2, \cdots, M$ を示し，おわりの部分 $p, q, r, \cdots$ は $M+1, \cdots, N$ を示すものとする．

さて，上の説明から (66.7) を解いて，Q_a を

$$Q_a = f_a\{Q_{M+1}, \cdots, Q_N, P_{M+1}, \cdots, P_N\} \qquad (a=1, \cdots, M)$$

の形に表わすことができるはずである． そこで，(66.7) を Q_r で微分すると

$$\frac{\mathring{\partial} F_a}{\partial Q_r} + \sum_{b=1}^{M} \frac{\partial F_a}{\partial Q_b} \frac{\partial Q_b}{\partial Q_r} = 0. \tag{66.8}$$

ここで左辺の第 1 項 $\mathring{\partial}$ は F_a の中に陽に含まれている Q_r に関する微分を示す．

いま， M 次元の関数行列式 $\partial F_a/\partial Q_b$ の逆行列を $(F^{-1})_{ab}$ としよう． すなわち，

$$(F^{-1})_{ab} \frac{\partial F_b}{\partial Q_c} = \frac{\partial F_a}{\partial Q_b} (F^{-1})_{bc} = \delta_{ac}$$

と定義すれば，(66.8) に左から $(F^{-1})_{da}$ を掛けて

$$\frac{\partial Q_d}{\partial Q_r} = -\sum_{a=1}^{M} (F^{-1})_{da} \frac{\mathring{\partial} F_a}{\partial Q_r} \tag{66.9}$$

となる．全く同様に

$$\frac{\partial Q_d}{dP_r} = -\sum_{a=1}^{M} (F^{-1})_{da} \frac{\mathring{\partial} F_a}{\partial P_r}. \tag{66.10}$$

いま，(p, q) の任意の関数を $A(p, q)$, $B(p, q)$ とする．これを新正準変数 P, Q でかき表わしたとき

$$A(p, q) \overset{d}{\equiv} A'(P_{M+1}, \cdots, P_N, Q_1, \cdots, Q_N),$$
$$B(p, q) \overset{d}{\equiv} B'(P_{M+1}, \cdots, P_N, Q_1, \cdots, Q_N)$$

とする．ここで新しい正準変数 $P_{M+1}, \cdots, P_N, Q_{M+1}, \cdots, Q_N$ を用いた Poisson 括弧を[,]*のようにかくことにすると

$$[A', B']^* \overset{d}{\equiv} \sum_{r=M+1}^{N} \frac{\partial A'}{\partial Q_r} \frac{\partial B'}{\partial P_r} - \frac{\partial A'}{\partial P_r} \frac{\partial B'}{\partial Q_r}.$$

ところで, Q_r は A' の中に陽に含まれているばかりでなく, $Q_a\,(a=1,\cdots,M)$ を通して間接的にも含まれている．したがって

$$\frac{\partial A'}{\partial Q_r}=\frac{\mathring{\partial} A'}{\partial Q_r}+\sum_{a=1}^{M}\frac{\partial A'}{\partial Q_a}\frac{\partial Q_a}{\partial Q_r}.$$

同様に B' も P_r に陽に依存するだけでなく, Q_a が P_r の関数であるために, これを通じて間接に P_r に依存する．したがって

$$\frac{\partial B'}{\partial P_r}=\frac{\mathring{\partial} B'}{\partial P_r}+\sum_{a=1}^{M}\frac{\partial B'}{\partial Q_a}\frac{\partial Q_a}{\partial P_r}.$$

これらに (66.9), (66.10) を代入し, それらを $[A', B']^*$ の第1項に代入すると

$$\begin{aligned}[A', B']^* =& \sum_{r=M+1}^{N}\frac{\mathring{\partial} A'}{\partial Q_r}\frac{\partial B'}{\partial P_r}-\sum_{r=M+1}^{N}\sum_{a,b=1}^{M}\frac{\mathring{\partial} A'}{\partial Q_r}\frac{\partial B'}{\partial Q_a}(F^{-1})_{ab}\frac{\mathring{\partial} F_b}{\partial P_r}\\ &-\sum_{r=M+1}^{N}\sum_{a,b=1}^{M}\frac{\partial A'}{\partial Q_a}(F^{-1})_{ab}\frac{\mathring{\partial} F_b}{\partial Q_r}\frac{\mathring{\partial} B'}{\partial P_r}\\ &+\sum_{r=M+1}^{N}\sum_{a,b,c,d=1}^{M}\frac{\partial A'}{\partial Q_a}(F^{-1})_{ab}\frac{\mathring{\partial} F_b}{\partial Q_r}\frac{\partial B'}{\partial Q_c}(F^{-1})_{cd}\frac{\mathring{\partial} F_d}{\partial P_r}\\ &-[\text{上の式の } A' \text{ と } B' \text{ を入れかえたもの}]. \end{aligned}\qquad(66.11)$$

ところで, Y_a, Z_a に通し番号をつけて

$$\left.\begin{aligned} X_a &\overset{d}{\equiv} Y_a,\\ X_{M+a} &\overset{d}{\equiv} Z_a \end{aligned}\right.\qquad (a=1,\cdots,M)$$

とおくことにより $2M$ 個の量 $X_i\,(i=1,\cdots,2M)$ を定義する．そこで, $2M$ 次元の行列

$$([X_i, X_k])\overset{d}{\equiv}\begin{pmatrix}[X_1, X_1] & [X_1, X_2] & \cdots & [X_1, X_{2M}]\\ \vdots & & & \\ [X_{2M}, X_1] & \cdots & \cdots & [X_{2M}, X_{2M}]\end{pmatrix}$$

を考えよう．[,] は従来どおり $2N$ 個の正準変数 $Q_1,\cdots,Q_N$, $P_1,\cdots,P_N$ に関する Poisson 括弧を示し，これらの変数の間には何らの関数関係もないとしたときの括弧である．各 X_i に対する定義を使うと，この行列はつぎのような形になる：

$$[X_i,\ X_k]=\left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & \cdots\cdots & 0 & -\mathring{\partial}F_1/\partial Q_1 & -\mathring{\partial}F_2/\partial Q_1 & \cdots & \mathring{\partial}F_M/\partial Q_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & -\mathring{\partial}F_1/\partial Q_M & \cdots\cdots & & -\mathring{\partial}F_M/\partial Q_M \\ \hline \mathring{\partial}F_1/\partial Q_1 & \cdots & \mathring{\partial}F_1/\partial Q_M & [F_1,\ F_1] & \cdots\cdots & & [F_1,\ F_M] \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \mathring{\partial}F_M/\partial Q_1 & \cdots & \mathring{\partial}F_M/\partial Q_M & [F_M,\ F_1] & \cdots\cdots & & [F_M,\ F_M] \end{array}\right). \tag{66.12}$$

この逆行列はつぎのような 4 個の部分行列に分かれる：

$$(X^{-1})_{i,k}\overset{d}{\equiv}\left(\begin{array}{c|c} X^{-1}{}_{ab} & X^{-1}{}_{a,M+b} \\ \hline X^{-1}{}_{M+a,b} & X^{-1}{}_{M+a,M+b} \end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{c|c} \sum(F^{-1})_{ac}[F_c,\ F_d](F^{-1})_{bd} & (F^{-1})_{ab} \\ \hline -(F^{-1T})_{ab} & \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \end{array}\right). \tag{66.13}$$

この $(X^{-1})_{i,k}$ を使うと (66.11) はつぎのようにかき表わされる.

$$[A',\ B']^*=[A',\ B']-\sum_{i,\,k=1}^{2M}[A',\ X_i](X^{-1})_{ik}[X_k,\ B']. \tag{66.14}$$

[,] は従来の意味の Poisson 括弧を示す．すなわち, $Q_1,\ \cdots,\ Q_N$ はすべて互いに独立としたときの Poisson 括弧である. なお, 正準変換に対して Poisson 括弧の値は不変であるから，もとの $(q,\ p)$ を用いたときも

$$[A,\ B]^*=[A,\ B]-\sum_{i,\,k=1}^{2M}[A,\ X_i](X^{-1})_{ik}[X_k,\ B] \tag{66.14$'$}$$

が成立する.

重力場の場合には $X_1,\ \cdots,\ X_{2M}$ に対応するものは

$$X_4=Y_0=\mathscr{H},\qquad (X_1,\ X_2,\ X_3)=Y_i=\chi_i\qquad (i=1,\ 2,\ 3),$$

$$X_8 = Z_0, \qquad (X_5,\ X_6,\ X_7) = Z_k \qquad (k = 1,\ 2,\ 3)$$

である．そこで (66.14)′ に対応して

$$[A,\ B]^* \equiv [A,\ B] - \iint \sum_{i,\,k=1}^{8} [A,\ X_i(\vec{x})] X^{-1}(\vec{x},\ \vec{x}')_{ik} [X_k(\vec{x}'),\ B] d^3x d^3x'$$

となる．積分はすべて超曲面 S 上で行う．

これを用いると，たとえば A として $X_4(\vec{y}) = \mathscr{H}(\vec{y},\ t=0)$ とおけば，任意の B に対して

$$\begin{aligned}
[\mathscr{H}(\vec{y},\ t=0),\ B]^* &= [X_4(\vec{y}),\ B] \\
&\quad - \iint \sum_{i,\,k=1}^{8} [X_4(\vec{y}),\ X_i(\vec{x})] X^{-1}(\vec{x},\ \vec{x}')_{ik} [X_k(\vec{x}'),\ B] d^3x d^3x' \\
&= [X_4(\vec{y}),\ B] - \int \delta(\vec{y} - \vec{x}') \delta_{4,k} [X_k(\vec{x}'),\ B] d^3x' \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる．同様に

$$[Z_\mu,\ B]^* = 0 \qquad (\mu = 0,\ \cdots,\ 3).$$

したがって [,] の代りに [,]*を用いれば，もはや $Y_\mu = 0$, $Z_\mu = 0$ という関係は自動的に計算のなかにとり入れられていることになる．したがってこれらの関係式のために，たとえば Hamiltonian は

$$\overline{H} = \int \mathscr{H}_{\mathrm{main}}\, d^3x \overset{d}{\equiv} \overline{H}_{\mathrm{main}}$$

となる．また，場の正準形方程式は

$$\frac{\partial e_{ik}}{\partial t} = [e_{ik},\ \overline{H}_{\mathrm{main}}]^*,$$

$$\frac{\partial \pi^{ik}}{\partial t} = [\pi^{ik},\ \overline{H}_{\mathrm{main}}]^*$$

となる．

新しい [,]* の内容は関係式 Z_μ のとりかたに応じて異なる．重力場の理論ではどのような Z を採用しても理論が非線形のために結果は依然として複雑であることはまぬがれえない．そこで，座標条件の効能や [,]* の内容をわかりやすくするために，最後に線形近似の場合の重力場に対する応用を紹介

しよう．

§67．弱い重力場の正準理論

まず，Lagrange 関数は（62.14），（63.10）から

$$\bar{L} \overset{d}{\equiv} \int L\, d^3x \overset{d}{\equiv} \frac{1}{2\kappa}\int \{\lambda\sqrt{e}\,(K^{ij}K_{ij}-K^2)-(\lambda-1)\sqrt{e}\,R\}d^3x$$

$$+\frac{1}{2\kappa}\int[-\sqrt{e}\,R+\{\sqrt{e}\,(e^{ki}\Gamma^m{}_{im}-e^{mn}\Gamma^k{}_{mn})\}_{,k}]d^3x \qquad (67.1)$$

である．この最後の項は，R の中にある Γ の微分を部分積分によりかきかえるとき，[　　] の中にある $\{\quad\}_{,k}$ と相殺するので簡単になる．その結果

$$\bar{L}=\frac{1}{2\kappa}\int\{\lambda\sqrt{e}\,(K^{ij}K_{ij}-K^2)-(\lambda-1)\sqrt{e}\,R\}d^3x$$

$$+\frac{1}{2\kappa}\int\sqrt{e}\,e^{ik}(\Gamma^m{}_{il}\Gamma^l{}_{km}-\Gamma^m{}_{ik}\Gamma^l{}_{ml})d^3x \qquad (67.11)'$$

となる．

ここで計量テンソルを

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+\sqrt{\kappa}\,h_{\mu\nu}, \qquad g^{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}-\sqrt{\kappa}\,h^{\mu\nu} \qquad (67.2)$$

とおく．この近似では

$$\left.\begin{aligned} &e_{ik}=\delta_{ik}+\sqrt{\kappa}\,h_{ik}, \qquad \lambda_k=\sqrt{\kappa}\,h_{0k}, \qquad e=1+\sqrt{\kappa}\sum_{i=1}^{3}h_{ii},\\ &\lambda=1-\frac{1}{2}\sqrt{\kappa}\,h_{00}, \qquad e^{ik}=\delta_{ik}-\sqrt{\kappa}\,h_{ik} \end{aligned}\right\} \qquad (67.3)$$

となる．ここでは添字の上下はすべて $\eta_{\mu\nu}$, $\eta^{\mu\nu}$ による．

これらを使うと

$$\left.\begin{aligned} K_{ij}&=\frac{\sqrt{\kappa}}{2}(h_{ij,0}-h_{0i,j}-h_{0j,i}),\\ K&=\frac{\sqrt{\kappa}}{2}(h_{,0}-2h_{0i,i}) \end{aligned}\right\} \qquad (67.4)$$

となる．またここでは特に

$$h \overset{d}{\equiv} \sum_{k=1}^{3} h_{kk} \tag{67.5}$$

と定義する．

これらを使い，κ の最低次の項にとどめると $\bar{L}$ は

$$\begin{aligned}\bar{L} = \int \boldsymbol{L}\, d^3x = \int \frac{1}{8}[&h_{ik,0}h_{ik,0} - 4h_{ik,0}h_{0i,k} - h_{,0}h_{,0} + 4h_{,0}h_{0i,i} \\ &+ 2h_{0i,k}h_{0i,k} + 2h_{0i,k}h_{0k,i} - 4h_{0i,i}h_{0k,k} \\ &+ 2h_{il,m}h_{im,l} - h_{mi,l}h_{mi,l} - 2h_{mi,i}h_{,m} + h_{,m}h_{,m} \\ &+ 2h_{00}(\Delta h - h_{mk,mk})]d^3x. \end{aligned} \tag{67.6}$$

Δ は $\sum_{i=1}^{3} \partial_i \partial_i$ である．

$h_{\mu\nu}$ に正準共役な運動量を $p^{\mu\nu}$ とすれば

$$p^{ik} = \frac{1}{4}\{h_{ik,0} - h_{0i,k} - h_{0k,i} - \delta_{ik}h_{,0} + 2\delta_{ik}h_{0l,l}\}, \tag{67.7}$$

$$p^i = 0, \qquad p^0 = 0.$$

これらはいずれも (62.16 a)～(62.16 c) を線形近似でかいたものに相当する．

(67.7) を $h_{ik,0}$ について解くと

$$h_{ik,0} = 4\left(p^{ik} - \frac{1}{2}\delta_{ik}p^{mm}\right) + h_{0i,k} + h_{0k,i}. \tag{67.7$'$}$$

これは (62.17) に対応する．h と p の Poisson 括弧は

$$\left.\begin{aligned}[h_{ik}(\vec{x}, x^0), p^{lm}(\vec{x}', x^0)] &= \delta_{ik}{}^{lm}\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \\ [h_{0i}(\vec{x}, x^0), p^k(\vec{x}', x^0)] &= \delta^k{}_i\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \\ [h_{00}(\vec{x}, x^0), p^0(\vec{x}', x^0)] &= \delta(\vec{x} - \vec{x}') \end{aligned}\right\} \tag{67.8}$$

となる．その他の組合せはすべて 0 である．

Hamiltonian は

$$\bar{H} = \int \boldsymbol{H} d^3x$$

$$=\int\Big\{2p_{ik}p^{ik}-(p_{ii})^2+2p_{ik}\partial_k h_{0i}-\frac{1}{4}h_{il,m}h_{im,l}$$

$$+\frac{1}{8}h_{il,m}h_{il,m}+\frac{1}{4}h_{il,l}h_{,i}-\frac{1}{8}h_{,l}h_{,l}$$

$$-\frac{1}{4}h_{00}(h_{,kk}-h_{ki,ki})\Big\}d^3x$$

$$+\int(p^i\alpha_i+p\beta)d^3x. \tag{67.9}$$

(67.9) から正準方程式を求めることは容易である．たとえば

$$\left.\begin{aligned} p_{,0}&=2(h_{,kk}-h_{ki,ki}),\\ p^i{}_{,0}&=2\partial_k p_{ik}.\end{aligned}\right\} \tag{67.10}$$

束縛条件は

$$\left.\begin{aligned} X_4&\overset{d}{\equiv} Y_0=h_{,kk}-h_{ki,ki}\approx 0,\\ X_i&\overset{d}{\equiv} Y_i=\partial_k p_{ki}\approx 0.\end{aligned}\right\} \tag{67.11}$$

いま，座標条件として

$$\left.\begin{aligned} X_{4+i}&\overset{d}{\equiv}\partial_k h_{ki}\approx 0,\\ X_8&\overset{d}{\equiv} p_{ii}\approx 0\end{aligned}\right\} \tag{67.12}$$

を採用しよう．(67.11), (67.12) の $\approx$ をすべて $=0$ におきかえ，それらすべてを用いて余計な成分を消去し，h_{ik}, p_{ik} のなかから，横波成分 $h_{ik}{}^T$, $p_{ik}{}^T$ だけを残すことは容易にできる．ここで，T の意味は

$$h_{ik}{}^T{}_{,k}=0,\qquad h_{ii}{}^T=0,$$
$$p_{ik}{}^T{}_{,k}=0,\qquad p_{ii}{}^T=0$$

である．

しかしここでは $[\ ,\ ]^*$ を用いる方法を説明しよう．線形近似の場合には $[\ ,\ ]^*$ を用いるよりも直接に余計な成分を消去する方が実は得策である．

一般論に従い，(67.11), (67.12) から 8×8 行列 $[X_i, X_k]$ を作ると

$$
([X_i(x),\ X_k(x')]) \overset{d}{\equiv}
\left(\begin{array}{cc:c:c}
\multicolumn{2}{c:}{O_4} & \begin{matrix}+\dfrac{1}{2}(\delta_{ik}\Delta+\partial_i\partial_k)\\ \times\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')\end{matrix} & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\\ \hdashline
 & & 0\quad 0\quad 0 & 2\Delta\delta(\vec{x}-\vec{x}')\\ \hdashline
\begin{matrix}-\dfrac{1}{2}(\delta_{ik}\Delta+\partial_i\partial_k)\\ \times\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')\end{matrix} & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} & O_3 & \partial_i\delta(\vec{x}-\vec{x}')\\ \hdashline
0\quad 0\quad 0 & -2\Delta\delta(\vec{x}-\vec{x}') & \partial_i\delta(\vec{x}-\vec{x}') & 0
\end{array}\right).
$$

O_4 は4次元の O 行列を示し，O_3 は3次元 O 行列である．右辺の i, k はいずれも1, 2, 3を示す．この逆行列 $(X^{-1})_{ik}$ は

$$
(X^{-1}(x,\ x'))_{ik} \overset{d}{\equiv}
\left(\begin{array}{c:c:c:c}
O_3 & \partial_i/2\Delta\Delta & -2\left(\dfrac{\delta_{ik}}{\Delta}-\dfrac{\partial_i\partial_k}{2\Delta\Delta}\right) & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\\ \hdashline
\partial_k/2\Delta\Delta & & 0\quad 0\quad 0 & -1/2\Delta\\ \hdashline
2\left(\dfrac{\delta_{ik}}{\Delta}-\dfrac{\partial_i\partial_k}{2\Delta\Delta}\right) & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} & \multicolumn{2}{c}{O_4}\\ \cdashline{1-2}
0\quad 0\quad 0 & +1/2\Delta & &
\end{array}\right)
\tag{67.13}
$$

である．ここで Δ^{-1} $(=1/\Delta)$ は

$$
\Delta\cdot\Delta^{-1}(\vec{x}-\vec{x}')=\delta(\vec{x}-\vec{x}')
$$

である．

(67.13) を用いて Poisson 括弧を $[\quad,\quad]^*$ にかえれば (67.11), (67.12) の $\approx$ をすべて $=0$ におきかえてよい．そこで (67.12) を (67.11) に代入すると

$$\Delta h = 0$$

となる．いま，無限遠で0という境界条件を満たし，さらにどこにも特異点をもたない解は

$$h = 0 \tag{67.14}$$

しかない．そこで，(67.14)，および (67.12) に対応する

$$\partial_k h_{ki} = 0, \qquad p_{ii} = 0 \tag{67.12$'$}$$

を使うと Hamiltonian は

$$\bar{H} = \int\left\{2\,p_{ik}p^{ik} + \frac{1}{8}h_{il,m}h_{il,m}\right\}d^3x \tag{67.15}$$

となる．ここで (67.11) に対応する

$$\partial_k p_{ki} = 0 \tag{67.11$'$}$$

も用いた．また h_{00}, h_{0i} が $\bar{H}$ の中にでてこないから $p=0$, $p^i=0$ とした．

最後に $[A, B]^*$ を求めてみよう．

$$\begin{aligned}
[h_{ik}(\vec{x}),\ p_{lm}(\vec{x}')]^* &= [h_{ik},\ p_{lm}] \\
&-\int[h_{ik}(\vec{x}),\ X_a(\vec{y})]X^{-1}(\vec{y},\ \vec{y}')_{a,4}[X_4(\vec{y}'),\ p_{lm}(\vec{x}')]d^3y d^3y' \\
&-\int[h_{ik}(\vec{x}),\ X_a(\vec{y})]X^{-1}(\vec{y},\ \vec{y}')_{a,4+b}[X_{4+b}(\vec{y}'),\ p_{lm}(\vec{x}')]d^3y d^3y' \\
&-\int[h_{ik}(\vec{x}),\ X_8(\vec{y})]X^{-1}(\vec{y},\ \vec{y}')_{8,4}[X_4(\vec{y}'),\ p_{lm}(\vec{x}')]d^3y d^3y'.
\end{aligned}$$

これに (67.13) を代入すると

$$\begin{aligned}
[h_{ik}(\vec{x},\ x^0),\ p_{lm}(\vec{x}',\ x^0)]^* &= \frac{1}{2}(\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{lm})\delta(\vec{x}-\vec{x}') \\
&+ \frac{1}{2}(\delta_{ik}\partial_l\partial_m + \delta_{lm}\partial_i\partial_k - \delta_{km}\partial_i\partial_l - \delta_{im}\partial_k\partial_l - \delta_{kl}\partial_i\partial_m - \delta_{il}\partial_k\partial_m)\Delta^{-1}(\vec{x}-\vec{x}') \\
&+ \frac{1}{2}\partial_i\partial_k\partial_l\partial_m\int\Delta^{-1}(\vec{x}-\vec{y})\,\Delta^{-1}(\vec{y}-\vec{x}')d^3y.
\end{aligned} \tag{67.16}$$

(67.16) は h_{ik}, p_{ik} の横波成分 $h_{ik}{}^T$, $p_{ik}{}^T$ の満たす Poisson 括弧と全く同じである．すなわち

$$[h_{ik}{}^T,\ p_{lm}{}^T] = \{(67.16)\ \text{の右辺}\}$$

である．これは関係式

$$X_i = 0 \qquad (i = 1, \cdots, 8) \tag{67.17}$$

と確かに矛盾していないことが容易に証明できる．すなわち

$$\left.\begin{array}{ll}[h_{ii},\ p_{lm}]^* = 0, & [h_{ik,k},\ p_{lm}]^* = 0, \\ [h_{ik},\ p_{mm}]^* = 0, & [h_{ik},\ p_{lm,m}]^* = 0\end{array}\right\} \tag{67.18}$$

である．

また，$\overline{H}$ として（67.15）を用いた正準方程式

$$h_{ik,0} = [h_{ik},\ \overline{H}]^*, \qquad p_{lm,0} = [p_{lm},\ \overline{H}]^* \tag{67.19}$$

はすべて（67.17）と両立する．なおこのようになった場合の独立成分の数は条件（67.17）のために h_{ik} が2個，p_{ik} も2個である．それらは既に述べたように $h_{ik}{}^T$，$p_{ik}{}^T$ にほかならない．

以上で重力場の理論の正準形式によるかきかえに関する話を終る．これを量子論に移すのには一般に，物理量 A を量子論的演算子 $\boldsymbol{A}$ におきかえればよい．また，Poisson 括弧 $[A,\ B]$ は

$$[A,\ B] \rightarrow \frac{1}{i\hbar}(\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA}) \overset{d}{\equiv} \frac{1}{i\hbar}[\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}]_-$$

という交換関係におきかえねばならない．さらに弱い等式，たとえば束縛条件 $\nabla_k \pi^{ki} \approx 0$ は状態関数 Ψ に対する条件

$$\nabla_k \boldsymbol{\pi}^{ki} \Psi = 0$$

におきかえねばならない．しかし $\boldsymbol{\pi}^{ki}$ と $\boldsymbol{e}_{ki}$ は演算子の順序の交換が許されないので，これに関連して種々の問題が生まれる．たとえば，

$$\nabla_k \boldsymbol{\pi}^k{}_i \Psi = \nabla_k \boldsymbol{\pi}^{kl} \boldsymbol{e}_{li} \Psi = 0,$$

または

$$\nabla_k \boldsymbol{\pi}^k{}_i \Psi = \boldsymbol{e}_{il} \nabla_k \boldsymbol{\pi}^{kl} \Psi = 0$$

のどちらが正しいのか，判定に困る．このほかに，重力場の量子化の研究は近年，技術的には相当に進歩したが，本質的な点でまだ不明な点が多い．

付　　録

1.　定理 3, 4 (§11) の証明

まず定理をここにもう一度述べる．なお，これらの定理は一般に n 次元空間でも成り立つ．

定理 3

反対称共変テンソル $f_{\mu\nu}$ が領域 Ω の中のすべての点で

$$\partial_\lambda f_{\mu\nu} + \partial_\mu f_{\nu\lambda} + \partial_\nu f_{\lambda\mu} = 0 \tag{11.12}$$

となるときは，$f_{\mu\nu}$ は適当なベクトル A_μ を用いて

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{11.7}$$

の形に表わされる．

[証　明]

λ, μ, ν が，1, 2 のいずれかであるときは 0 でない $f_{\mu\nu}$ は $f_{12} = -f_{21}$ だけである．また (11.12) は自明となり，f_{12} に対してなんら新しい制約を与えない．そこでいま

$$A_1 = 0, \qquad A_2 = \int_a^{x^1} f_{12}\, dx^1 \tag{付 1.1}$$

とおけば，もちろん

$$\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = f_{12} \tag{付 1.2}$$

となる．

つぎに，$\lambda = 3$, $\mu = 1$, $\nu = 2$ とおけば，(11.12) は

$$\partial_3 f_{12} + \partial_1 f_{23} + \partial_2 f_{31} = 0.$$

これに (付 1.2) を代入すると

$$\partial_1(f_{23} + \partial_3 A_2) - \partial_2(f_{13} + \partial_3 A_1) = 0.$$

したがって

$$f_{23} + \partial_3 A_2 = \partial_2 B, \qquad f_{13} + \partial_3 A_1 = \partial_1 B \tag{付 1.3}$$

という B が存在する．B を A_3 とかけば

$$f_{23} = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2, \qquad f_{13} = \partial_1 A_3 - \partial_3 A_1. \tag{付 1.4}$$

つぎに，$\lambda = 0$, また μ, ν は 1, 2, 3 のどれかとすれば，(11.12) は

$$\partial_0 f_{\mu\nu} + \partial_\mu f_{\nu 0} + \partial_\nu f_{0\mu} = 0.$$

これに (付 1.4), (付 1.2) を代入すると

$$\partial_\mu(f_{\nu 0} + \partial_0 A_\nu) - \partial_\nu(f_{\mu 0} + \partial_0 A_\mu) = 0.$$

そこで

$$f_{\nu 0} + \partial_0 A_\nu = \partial_\nu C, \qquad f_{\mu 0} + \partial_0 A_\mu = \partial_\mu C$$

という C が存在する．C を A_0 とかけば

$$f_{\nu 0} = \partial_\nu A_0 - \partial_0 A_\nu \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3) \tag{付 1.5}$$

となる．そこで結局

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad (\mu,\ \nu = 0,\ 1,\ \cdots,\ 3)$$

という形にかき表わされる．

定理 4

完全反対称 3 階共変テンソル $F_{\lambda\mu\nu}$ が Ω のいたるところで

$$\partial_\mu F_{\nu\rho\sigma} - \partial_\nu F_{\rho\sigma\mu} + \partial_\rho F_{\sigma\mu\nu} - \partial_\sigma F_{\mu\nu\rho} = 0 \tag{11.13}$$

となるときは，$F_{\lambda\mu\nu}$ は適当な反対称共変テンソル $A_{\mu\nu}$ を用いて

$$F_{\lambda\mu\nu} = \partial_\lambda A_{\mu\nu} + \partial_\mu A_{\nu\lambda} + \partial_\nu A_{\lambda\mu} \tag{11.9}$$

の形に表わされる．

［証 明］

まず (11.13) の $\mu,\ \nu,\ \rho,\ \sigma$ はすべて 1, 2, 3 のいずれかとする．$F_{\lambda\mu\nu}$ の 0 でない成分は F_{123} か，これの添字の順序をおきかえたものだけである．なお，このときは (11.13) は自明となり，F に対してなんら新しい制約を与えない．そこで，$A_{12} = A_{13} = 0$ とおき

$$A_{23} = \int_a^{x^1} F_{123}\, dx^1 \tag{付 1.6}$$

とおけば

$$F_{123} = \partial_1 A_{23} + \partial_2 A_{31} + \partial_3 A_{12} \tag{付 1.7}$$

となる．

つぎに，(11.13) で $\mu = 0,\ \nu = 1,\ \rho = 2,\ \sigma = 3$ とすれば

$$\partial_0 F_{123} - \partial_1 F_{230} + \partial_2 F_{301} - \partial_3 F_{012} = 0.$$

これに (付 1.7) を代入すると

$$\partial_1(\partial_0 A_{23} - F_{230}) + \partial_2(\partial_0 A_{31} - F_{310}) + \partial_3(\partial_0 A_{12} - F_{120}) = 0. \tag{付 1.8}$$

いま $i,\ k$ は 1, 2, 3 のいずれかを示すものとして

$$B_{ik} \overset{d}{\equiv} \partial_0 A_{ik} - F_{ik0} = -B_{ki} \tag{付 1.9}$$

とおけば，(付 1.8) は

$$\partial_1 B_{23} + \partial_2 B_{31} + \partial_3 B_{12} = 0$$

となる．そこで定理 3 により $i,\ k = 1,\ 2,\ 3$ に対して

$$B_{ik} = \partial_i B_k - \partial_k B_i \tag{付 1.10}$$

という形にかき表わされる．これに (付 1.9) を代入すれば

$$F_{ik0} = -\partial_i B_k + \partial_k B_i + \partial_0 A_{ik}.$$

いま，B_k の代りに $A_{0k} = -A_{k0}$ とかくことにすれば

$$F_{ik0} = \partial_i A_{k0} + \partial_k A_{0i} + \partial_0 A_{ik} \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3). \tag{付 1.11}$$

(付 1.11), (付 1.7) を一緒にすれば

$$F_{\lambda\mu\nu} = \partial_\lambda A_{\mu\nu} + \partial_\mu A_{\nu\lambda} + \partial_\nu A_{\lambda\mu} \qquad (\lambda, \mu = 0, \cdots, 3) \qquad (付 1.12)$$

となる.

なお上の定理ではすべての量は共変テンソルと仮定したが, この条件はこの定理には全く不要である. 要するに, ある特定の座標系で, 成分を示す添字の置換に対して完全反対称でありさえすれば十分である.

2. 流体のエネルギー・テンソル(§18)

まず特殊相対論の範囲で,流体のエネルギー・テンソルを求めよう. 本文(第3章, 103ページの脚注)の約束に従って $T^0{}_0$ は流体のエネルギー密度を表わすとする. いま, 座標軸に垂直な平面でかこまれた直方体(その内部を V, 表面を S)の内部にわたって, $T^\mu{}_\nu$ の保存則を空間積分すると, まず $\nu=0$ の場合は

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V T^0{}_0\, d^3x = -c\int_V \sum_{k=1}^{3} \partial_k T^k{}_0\, d^3x = \sum_{k=1}^{3}\int_S (-cT^k{}_0)d\sigma_k. \qquad (付 2.1)$$

$d\sigma_k$ は第 k 軸に垂直な平面の面積要素で, V から外向きを正とする. この左辺は V の中にあるエネルギーの時間的増加率を示すから, 右辺 $(+cT^k{}_0)$ は単位時間に k 軸に垂直な単位面積を k 軸の正の向きに流れるエネルギー量を表わす.

さて, 点 x におけるエネルギーの流れの3次元的速度を $v^k(k=1, 2, 3)$ とすれば

$$cT^k{}_0 = v^k T^0{}_0 = v^k c^2\left(\frac{T^0{}_0}{c^2}\right) = c^2 v^k \times (\text{運動質量密度}).$$

したがって $T^k{}_0/c$ は流体の運動量密度の第 k 成分である. $T^k{}_0 = -T^0{}_k$ であるから

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(-\frac{1}{c}T^0{}_k\right)d^3x = \sum_{l=1}^{3}\int_V \partial_l T^l{}_k\, d^3x = \sum_{l=1}^{3}\int_S T^l{}_k\, d\sigma_l.$$

左辺は V のなかにある流体の運動量の第 k 成分の時間的増加率を示す. したがって右辺は外から V の中の流体に働く力の第 k 成分である. そこで $T^l{}_k$ は第 l 軸に垂直な表面上の単位面積に外から働く力の第 k 成分を示す. 流体では外力(圧力)は常に面に垂直で, V の内部に向く. つまり

$$T^l{}_k(x) = -p(x)\delta^l{}_k. \qquad (付 2.2)$$

そこで特に点 x における流体の静止系を基準にとれば, $T^\mu{}_\nu(x)$ は

$$\begin{cases} T^0{}_0(x) = \rho(x)c^2, \\ T^l{}_k(x) = -p(x)\delta^l{}_k, \\ \text{その他の成分} = 0 \end{cases} \qquad (付 2.3)$$

となる.

さて, $T^\mu{}_\nu$ を2個のスカラー量 $\rho(x)$, $p(x)$ および流体の4元速度 $u^\mu(x)$, 最後に計

量テンソル $\eta_{\mu\nu}$ を使ってかけば，最も一般的には

$$T^{\mu}{}_{\nu}(x) = \rho(x)\{au^{\mu}u_{\nu} + b\delta^{\mu}{}_{\nu}\} + p(x)\{\alpha u^{\mu}u_{\nu} + \beta\delta^{\mu}{}_{\nu}\} \qquad (付\,2.4)$$

となる．a, b, α, β は未定の係数である．ところで，静止系では

$$u^0 = -u_0 = c, \qquad u^k = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ 3).$$

さらに，（付 2.3）を使うと係数がきまり，$T^{\mu}{}_{\nu}$ は

$$T^{\mu}{}_{\nu}(x) = -\left\{\rho u^{\mu}u_{\nu} + p\left(\frac{1}{c^2}\,u^{\mu}u_{\nu} + \delta^{\mu}{}_{\nu}\right)\right\} \qquad (付\,2.5)$$

となる．（付 2.5）を一般相対論的にかきかえれば

$$\boldsymbol{T}^{\mu\nu}(x) = -\sqrt{-g(x)}\left\{\rho u^{\mu}u^{\nu} + p\left(\frac{1}{c^2}\,u^{\mu}u^{\nu} + g^{\mu\nu}\right)\right\} \qquad (付\,2.5)'$$

となる．これはまさに本文の（18.17）にほかならない．

なお，上に述べたエネルギーの流れの速度 v^k と流体の 4 元速度 u^{μ} の関係は（付 2.5）から（ただし今度は静止系は使わない），

$$v^k = c\,\frac{T^k{}_0}{T^0{}_0} = c\,\frac{\{\rho + (p/c^2)\}u^k u_0}{\{\rho + (p/c^2)\}u^0 u_0 + p}.$$

ここで $p = 0$ とおくことができるときは $v^k = cu^k/u^0$ となる．一方，特殊相対論では $(u^0)^2 - \sum_{k=1}^{3}(u^k)^2 = c^2$ であるから

$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{1 - (\vec{v}/c)^2}}, \qquad u^k = \frac{v^k}{\sqrt{1 - (\vec{v}/c)^2}}$$

である．

参　考　書

(1)　湯川秀樹監修：アインシュタイン選集2，共立出版 (1970)
(2)　内山龍雄編：相対論的重力場の理論(新編物理学選集63)，日本物理学会編 (1975)
(3)　H. Weyl: *Raum, Zeit, Materie* (5 Aufl.) Springer (1923)〔内山龍雄訳：空間・時間・物質，講談社 (1973)〕
(4)　W. Pauli: *Relativitätstheorie*, Encyklopädie der Math. Wiss. 5 Bd., Teubner (1921)〔内山龍雄訳：相対性理論，講談社 (1974)〕
(5)　E. Schrödinger: *Space-time Structure*, Cambridge Univ. Press (1950)〔湯川秀樹監修：シュレーディンガー選集2，共立出版 (1974)〕
(6)　L. Landau and E. Lifshitz: *The Classical Theory of Fields.* (translated from Russian by M. Hamermesh), Addison-Wesley Press, Inc., Cambridge, Mass. (1951)〔広重 徹，恒藤敏彦訳：場の古典論，東京図書 (1964)〕
(7)　C. Møller: *The Theory of Relativity*, Oxford Univ. Press (1952)〔永田恒夫，伊藤大介訳：相対性理論，みすず書房 (1959)〕
(8)　V. Fock: *The Theory of Space, Time and Gravitation*, Pergamon Press (1959)
(9)　J. Weber: *General Relativity and Gravitational Waves*, Interscience (1961)〔藤田純一訳：一般相対論と重力波，講談社 (1974)〕
(10)　R. Adler, M. Bazin and M. Schiffer: *Introduction to General Relativity*, McGraw-Hill (1965)
(11)　山内恭彦，内山龍雄，中野董夫：一般相対性および重力の理論，裳華房 (1967)
(12)　平川浩正：相対論，共立出版 (1971)
(13)　後藤憲一：相対論（共立全書），共立出版 (1972)
(14)　P. A. M. Dirac: *General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons, Inc. (1975)〔江沢 洋訳：一般相対性理論，東京図書 (1977)〕
(15)　内山龍雄：相対性理論（岩波全書），岩波書店 (1977)

(1) は Einstein の数多くの論文のなかで，一般相対論ならびに，統一場理論に関する主要なものを邦訳集録したものである．Einstein の論文はそのスタイルが簡明で，しかも厳密であり一読に値する．もちろん，開拓者の原論文であるから，最近の新しいことがかいてないのは当然だが，標準的な教科書にのっていることは，ほとんど彼の論文のまる写しといえる．いやむしろ原論文の方が簡明なだけ，よりすぐれているといえるかもしれない．

(2) は Einstein 以外の研究者による一般相対論に関する研究のなかで，1960 年までの論文のうち特に主要なものを原文のまま集録した. §44 に引用された Lense, Thirring の有名な論文や，第 10 章に述べた正準理論に関する論文，さらに Kruskal の論文や，宇宙物理学における一般相対論の応用に関する論文がのっている．これは本書を読みおえた読者向きの文献といえよう．

(3), (4) は相対性理論に関する有名な古典である．特に (3) は難解で有名である．(4) はその性格上，非常に多数の参考文献が集められている．また書物の内容も著者らしいクリヤー・カットな叙述で，読者を魅了するに十分な名著である．昔は，相対論の勉強をはじめる人は必ずこれらの書物からはじめたものである．

(5) は非常にページ数の少ない書物であるため，その内容がかたよっているのはやむをえないが，しかし著者の得意とする統一場理論への入門書として，また著者一流の立場から一般相対論をコンパクトにまとめた書物として名著といえよう．しかし，一般相対論の一般的勉強をするには不適当である．

(6) は書物の名前の示すとおり，電磁場，特殊相対論，ならびに一般相対論の総合的教科書である．したがって，一般相対論の教科書としては若干物たりないが各所に，著者の鬼才の片鱗が顔をだしていると思う．

(7) は典型的な教科書である．最新版はページ数も増加し，読み了えるにはますます時間が多くかかるようになった．

(8) も他に類をみない書物である．(6) と同様にソ連人のかいた本ではあるが両者には大きな違いがある．本書の方が (6) 以上に個性的であるが，多分 (6) よりは読者に好かれないであろう．

(9) も小冊子である．著者 Weber は重力波の実験のパイオニアである．したがってこの本も重力波に関する部分や，それに関係のある参考文献が沢山にのっている．一般相対論の基本的事項は必要最小限の範囲で説明がある．重力波に関する参考書としてはよいが，相対論の教科書としてはものたりない．

(10) はよい本である．内容も新しく，推奨に値する本といえよう．

(11) は本書の前身ともいうべき書物である．部分的には本書よりもすぐれている．しかし著者の趣味で必要以上にこりすぎているか所もある．

(12), (13) は入門書としてよい本である．いずれも小冊子だから，これだけでは物たりないが，特殊相対論も含めた相対論の全般を知るには手頃の書物といえよう．

(14) はこの著者から想像するに相当に特長のある書物と思う．しかし筆者は残念ながら読んだことがないので良し悪しについて確信をもった発言はできない．しかしページ数も少ないから，すぐに読了できると思う．

(15) は筆者のかいたものである．自分の作品を自分で批評するのはまことに具合が悪いが，この本もページ数の関係で，とりあげた事項には大きな制限がある．しかし必要なことは手を抜かずに説明してある．本書「一般相対性理論」に対するよい入門書と思う．

索　引

エ

オ

カ　ガ

キ　ギ

ク

ケ　ゲ

コ

サ　ザ

ス

セ　ゼ

ソ

タ

チ

ツ

テ デ

ト　ド

ナ

ニ

ヌ

ネ

ノ

ハ バ パ

ヒ ビ

フ ブ

ヘ ベ ペ

ホ　ポ

マ

ミ

ム

著者略歴

1916年（大正5年）静岡県に生まれる．旧制静岡高校，旧大阪帝大理学部物理学科卒（1940）．同学助手，講師，助教授を経て，現在 阪大教授（理学部物理学教室）．1964～1974まで“一般相対論および重力”の国際委員会委員．理学博士．

主な著書：「一般相対性および重力の理論」（共著，裳華房），「相対性理論」（岩波書店）．その他に相対性理論に関する翻訳書が2,3ある．

一 般 相 対 性 理 論 定価 4600 円

昭和53年7月25日 第1版印刷
昭和53年7月30日 第1版発行 ©
昭和54年10月25日 第2版発行

著作者の了解により検印を省略いたします

著作者 内 山 龍 雄（うち やま りょう ゆう）
発行者 吉 野 達 治
発行所 東京都千代田区四番町8番地
電話 東京 262-9166～9
株式会社 裳 華 房
印刷所 東京都新宿区新小川町1-6
中央印刷株式会社
製本所 東京都千代田区神田錦町3-13
牧製本印刷株式会社

NSPA 自然科学書協会

社団法人
自然科学書協会会員